DM n°1

À rendre le 08/10/2024

Exercice 1

On considère les deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$u_0 = 0,\ v_0 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n + v_n) \\ \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_{n+1} + v_n) \end{cases}$$

1. Vérifier que $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et $v_1 = \dfrac{3}{4}$; calculer u_2 et v_2.
2. Compléter le script python suivant qui permet de déterminer u_n et v_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n=int(input('entrez la valeur de n :'))
u = .........
v=.........
for k in range(1,n+1):
    u = .........
    v = .........
print(u)
print(v)
```

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $w_n = v_n - u_n$.
   (a) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'égalité : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2}w_n$.
   (b) En déduire que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.
   (c) i. Montrer que l'on a :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n-1} w_k = \frac{4}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right).$$
   ii. En déduire à l'aide de la question 3.a) l'expression de u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   iii. Vérifier que l'expression précédente reste valide pour $n = 0$.
   (d) Justifier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donner sa limite.
   (e) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n et donner la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. (a) Justifier que l'unique réel α pour lequel la série de terme général $t_n = \dfrac{9}{8}(\alpha - u_n)$, avec $n \in \mathbb{N}$, est convergente est $\alpha = \dfrac{2}{3}$.
   Dans les questions suivantes, on choisit $\alpha = \dfrac{2}{3}$.
   (b) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $t_n > 0$ et établir l'égalité : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t_n = 1$.
5. Soit X une variable aléatoire dicrète à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}, P([X = n]) = t_n$.
   (a) On pose : $Y = X + 1$. Reconnaître la loi de la variable aléatoire Y.
   (b) En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.

Exercice 2 (facultatif)

Partie 1

On pose, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$.
2. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \leqslant \ln(n) + 1$.

Partie 2

On considère une suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation suivante, valable pour tout entier n : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

1. (a) Montrer par récurrence que chaque terme de cette suite est strictement positif.
   (b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
2. (a) Pour tout entier k, exprimer $u_{k+1}^2 - u_k^2$ en fonction de u_k^2.
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n^2 = 2n + 1 + \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$.
   (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n^2 \geqslant 2n + 1$. En déduire la limite de la suite (u_n).
3. (a) A l'aide du résultat précédent, montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :
   $u_n^2 \leqslant 2n + 2 + \frac{1}{2} v_{n-1}$.
   (b) En utilisant la partie 1., établir que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :
   $u_n^2 \leqslant 2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2}$.
   (c) En déduire finalement que $u_n \sim \sqrt{2n}$ quand $n \to +\infty$.

Partie 3

1. Ecrire un programme en python permettant de calculer et d'afficher u_{10}.
2. (a) Ecrire un deuxième programme qui permette de déterminer et d'afficher le plus petit entier naturel n pour lequel $u_n \geqslant 100$.
   (b) On donne $\ln(2) < 0,70$ et $\ln(5) < 1,61$. En déduire un majorant de $\ln(5000)$.
   (c) Montrer que l'entier n trouvé en 2a) est compris entre 4995 et 5000.