Comparaison des fonctions et Développements Limités

Introduction, Rappels

Ce chapitre est destiné à fournir des outils pour l'étude des fonctions, en particulier leurs limites. Ce sera aussi l'occasion de revoir l'ensemble du cours de première année sur l'étude des fonctions à travers certains exercices. On ne rappellera pas tout lors du cours ; cependant on rappelle ci-dessous les formules de dérivation ainsi qu'un point en lien avec ce nouveau cours : les développements limités d'ordre 1. Les autres points à revoir sont (liste non exhaustive) :

- la définition de la continuité et de la dérivabilité (TD Ex7) ;
- les fonctions usuelles et leurs limites (TD Ex1) ;
- les règles usuelles concernant les limites (somme, produit, quotient ...) (TD Ex1) ;
- le théorème de la bijection continue et ses applications.

0.1 Formules de dérivations

On les rappelle brièvement.
Opérations algébriques : Soit u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I. Alors :

Somme La fonction définie par $x \mapsto u(x) + v(x)$ est dérivable sur I et a pour dérivée $x \mapsto u'(x) + v'(x)$.

Produit par une constante Étant donné $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction définie par $x \mapsto \lambda\, u(x)$ est dérivable sur I et a pour dérivée $x \mapsto \lambda\, u'(x)$.

Produit La fonction définie par $x \mapsto u(x)v(x)$ est dérivable sur I et a pour dérivée $x \mapsto u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

Inverse La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{v(x)}$ (v ne doit pas s'annuler sur I) est dérivable sur I et a pour dérivée $x \mapsto \dfrac{-v'(x)}{v(x)^2}$.

Quotient La fonction définie par $x \mapsto \dfrac{u(x)}{v(x)}$ (v ne doit pas s'annuler sur I) est dérivable sur I et a pour dérivée $x \mapsto \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$.

Composition : Soit u et v deux fonctions définies et dérivables sur des intervalles I et J telles que $u(I) \subset J$. Alors la fonction définie sur I par $x \mapsto v(u(x))$ est dérivable et a pour dérivée $x \mapsto u'(x) \times v'(u(x))$.
Cas particuliers :

- La fonction définie par $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable et a pour dérivée $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$.
- La fonction définie par $x \mapsto \ln(u(x))$ (on doit avoir $J \subset]0; +\infty[$) est dérivable et a pour dérivée $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.
- Étant donné $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction définie par $x \mapsto (u(x))^\alpha$ (J vérifiant certaines conditions suivant la valeur de α) est dérivable et a pour dérivée $x \mapsto \alpha u'(x)(u(x))^{\alpha-1}$.

0.2 Développements limités d'ordre 1

On rappelle qu' une fonction f est dérivable en un point x_0, de dérivée $f'(x_0)$ si et seulement si il existe une fonction ϵ définie sur un voisinage J de x_0 telle que

- $\forall x \in J,\ f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+(x-x_0)\epsilon(x)$
- $\lim\limits_{x\to x_0} \epsilon(x) = 0.$

Cette expression de f au voisinage de x_0 est appelée développement limité à l'ordre 1 (DL1) de f en x_0.

Remarque 0.1. *Montrons que si f admet un tel DL1 en x_0, alors f est bien dérivable en x_0 (on admettra la réciproque).*

Remarque 0.2. *Graphiquement, ce DL1 précise la distance entre la courbe et sa tangente au voisinage de x_0 :*
$d(x) = f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))$.

Exemples 0.3. *Déterminer les DL1 en 0 de e^x, $\ln(1 + x)$, $(1 + x)^\alpha$.*

Exemples 0.4. *Déterminer la limite en 0 (si elle existe) de* $x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{x^2}$.

1 Comparaison des fonctions

Dans ce qui suit, f et g sont deux fonctions définies sur un intervalle I et x_0 un point de I ou une borne de I (qui peut être $\pm\infty$). On appelle voisinage de x_0 un intervalle du type :

- $]x_0-\alpha; x_0+\alpha[$ si x_0 est un point qui n'est pas une borne ;
- $]x_0-\alpha; x_0[$, $]x_0-\alpha; x_0]$, $]x_0; x_0+\alpha[$, ou $[x_0; x_0+\alpha[$ (à adapter à la situation) si x_0 est un point qui est une borne ;
- $]A; +\infty[$ (resp. $]-\infty; A[$) si x_0 est $+\infty$ (resp $-\infty$).

On supposera également les fonctions continues sur leur intervalle de définition.

1.1 Négligeabilité

On donne un sens précis au fait qu'une fonction soit négligeable devant une autre :

Définition 1.1. *On dit que f est négligeable devant g en x_0 s'il existe une fonction ϵ définie sur un voisinage J de x_0 telle que*

- $\forall x \in J,\ f(x) = g(x)\ \epsilon(x)$;
- $\lim\limits_{x\to x_0} \epsilon(x) = 0$

On note alors : $f = \underset{x_0}{o}(g)$ (souvent par abus de langage : $f(x) = \underset{x_0}{o}(g(x))$).

Attention : Il ne suffit pas que l'on ait, pour tout x dans I, $f(x) \leq g(x)$ pour conclure que f est négligeable devant g.

Remarque 1.2. *On peut réécrire le développement limité à l'ordre 1 rappelé en introduction :*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)\ .$$

Exemples 1.3. *Montrer que*

1. $x = \underset{+\infty}{o}(x^2)$
2. $x = \underset{+\infty}{o}(e^x)$

Comme on l'a vu sur cet exemple, on peut caractériser la négligeabilité par le quotient :

Propriété 1.4. *On garde les notations qui précèdent et on suppose de plus que g ne s'annule pas sur I (plus précisément : sur un voisinage de x_0, sauf éventuellement en x_0). Alors $f = \underset{x_0}{o}(g)$ si et seulement si*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0\ .$$

Démonstration :

On reformule ainsi les règles de croissance comparées :

Propriété 1.5. *Pour tout* $\alpha > 0$ *et* $\beta > 0$,

- *en* $+\infty$, $x^\alpha = o\left(e^{\beta x}\right)$;
- *en* $+\infty$, $(\ln x)^\beta = o\left(x^\alpha\right)$.

Démonstration :

Remarque 1.6. *Rappelons que l'on a également, pour tout* $\alpha > 0$ *et* $\beta > 0$,

$$\lim_{x\to-\infty} x^\alpha \, e^{\beta x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} x^\alpha (\ln x)^\beta = 0 \ ;$$

ce que l'on pourrait formuler :

$$e^{\beta x} = \underset{-\infty}{o}\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) \quad \text{et} \quad x^\alpha = \underset{0}{o}\left(\frac{1}{(\ln x)^\beta}\right) .$$

Exemple 1.7. *Comparer, pour deux entier* n *et* m *vérifiant* $0 < n < m$, *de* $(x-x_0)^n$ *et* $(x-x_0)^m$ *en* x_0 *ainsi que de* x^n *et* x^m *en* $\pm\infty$.

Propriété 1.8 (Règles de manipulation des o).

- *Si* $f = o(g)$ *et* $g = o(h)$, *alors* $f = o(h)$.
- *Si* g *admet une limite finie en* x_0 *et* $f = o(g)$ *en* x_0, *alors* f *tend vers* 0 *en* x_0.
- *Si* $f = o(g)$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$, *alors* $\lambda f = o(g)$; *si de plus* $\lambda \neq 0$, $f = o(\lambda g)$.
- *Si* $f_1 = o(g)$ *et* $f_2 = o(g)$, *alors* $f_1 + f_2 = o(g)$.
- *Si* $f_1 = o(g_1)$ *et* $f_2 = o(g_2)$, *alors* $f_1 \times f_2 = o(g_1 \times g_2)$.
- *Si* $f = o(g)$, *alors, pour toute fonction* h, $f \times h = o(g \times h)$.

Démonstration :

Exemple 1.9. *1. Montrer qu'en $+\infty$, $x\ln(x) = o(x^2)$.*

2. Déterminer le DL1 en 0 de $(1+x)^{1/2} + \ln(1+x)$.

Remarque 1.10. *Le dernire point de la propriété est le plus souvent utilisé de la manière suivante : si on a, en x_0, $f(x) = o(x^n)$, alors $xf(x) = o(x^{n+1})$ et $\frac{1}{x}f(x) = o(x^{n-1})$.*

1.2 Équivalence

On donne un sens précis au fait que deux fonctions ont un comportement similaire :

Définition 1.11. *On dit que f et g sont équivalentes en x_0 s'il existe une fonction γ définie sur un voisinage J de x_0 telle que*

- $\forall x \in J,\ f(x) = g(x)\ \gamma(x)$;
- $\lim\limits_{x\to x_0} \gamma(x) = 1$

On note alors : $f \underset{x_0}{\sim} g$ (souvent par abus de langage : $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$).

Exemple 1.12. *Montrer que $x^3 - 3x^2 - 7 \underset{+\infty}{\sim} x^3$.*

On peut également caractériser l'équivalence par le quotient :

Propriété 1.13. *On garde les notations qui précèdent et on suppose de plus que g ne s'annule pas sur I (plus précisément : sur un voisinage de x_0, sauf éventuellement en x_0). Alors $f \underset{x_0}{\sim} g$ si et seulement si*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1\ .$$

Exemple 1.14. *Montrer que $x^3 + \ln(x) \underset{+\infty}{\sim} x^3$.*

On utilisera également la propriété suivante :

Propriété 1.15. *On suppose que sur I on a $f = g_1 + g_2$, avec $g_2 = \underset{x_0}{o}(g_1)$. Alors on a $f \underset{x_0}{\sim} g_1$.*

Démonstration :

Exemple 1.16. *Reprendre l'exemple précédent.*

1.3 Fonctions usuelles

Les équivalents que nous utiliserons sont les suivants.

Propriété 1.17 (Fonctions admettant une limite finie non nulle)**.** *Si la fonction f admet en x_0 une limite l non nulle, alors $f(x) \underset{x_0}{\sim} l$.*

Démonstration :

Remarque 1.18. *L'hypothèse $l \neq 0$ est importante. On n'écrit d'ailleurs jamais $f(x) \sim 0$*

Reprenons les DL1 en 0 vus précédemment :

- $\ln(1+x) = \dots$
- $e^x = \dots$
- Pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $(1+x)^\alpha = \dots$

On obtient ainsi :

Propriété 1.19 (Équivalents usuels en 0)**.**

- $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$
- $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$
- *Pour* $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$

En extrapolant ce qui a été vu dans des exemples (Ex 1.7), on obtient :

Propriété 1.20 (Fonctions polynômes)**.** *Considérons la fonction polynôme $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_m x^m$, où $n > m$, $a_n \neq 0$ et $a_m \neq 0$ et on a écrit selon les degrés décroissants. Alors*

- $P(x) \underset{\pm\infty}{\sim} a_n x^n$
- $P(x) \underset{0}{\sim} a_m x^m$

1.4 Règles d'utilisation

Les équivalents permettrons en particulier de déterminer des limites.

Propriété 1.21. *Si f admet en x_0 une limite l finie ou infinie et si $g \underset{x_0}{\sim} f$, alors g admet également l pour limite en x_0.*

Démonstration :

On aura besoin pour cela de combiner les équivalents usuels à travers certaines règles.

Propriété 1.22. *Soit f_1, f_2, g_1, g_2 des fonctions telles que $f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{x_0}{\sim} g_2$, alors on a :*

- $f_1 \times f_2 \underset{x_0}{\sim} g_1 \times g_2$
- *si* $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha\ f_1 \underset{x_0}{\sim} \alpha\ g_1$
- $\dfrac{f_1}{f_2} \underset{x_0}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2}$
- *si* $\alpha \in \mathbb{R}$, $(f_1)^\alpha \underset{x_0}{\sim} (g_1)^\alpha$

Démonstration :

Exemple 1.23. *Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $\dfrac{x^2+x-3}{x^3+7x^2+x-6}$, puis sa limite.*

Remarque 1.24. *Les équivalents ne peuvent par contre être additionnés. Exemple : x^3+x^2 et $-x^3+x$ en $+\infty$.*

Propriété 1.25. *Soit f_1, f_2, f_3, g_2 des fonctions telles que $f_1 \underset{x_0}{\sim} f_2$ et $f_2 \underset{x_0}{\sim} f_3$. Alors on a : $f_1 \underset{x_0}{\sim} f_3$.*

Démonstration :

On utilise également souvent la propriété suivante :

Propriété 1.26. *Soit f, g des fonctions telles que $f \underset{x_0}{\sim} g$ et soit u une fonction admettant x_0 pour limite en x_1. Alors on a :*

$$f(u(x)) \underset{x_1}{\sim} g(u(x)) \ .$$

Démonstration :

Exemple 1.27. *Déterminer la limite en $+\infty$ de $(x^2 - x + 6)\ln\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)$.*

Cas particuliers importants : si $u(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$, alors

- $\ln(1 + u(x)) \underset{x_0}{\sim} u(x)$
- $e^{u(x)} - 1 \underset{x_0}{\sim} u(x)$
- $(1 + u(x))^{\alpha} \underset{x_0}{\sim} \alpha \ u(x)$

Remarque 1.28. *Attention, on n'a pas dit ci-dessus que les équivalents pouvaient être 'composés'. Exemple :* $\exp(x^2)$ *et* $\exp(x^2 + x)$.

2 Développements limités

2.1 Définition

On dit qu'une fonction f admet un développement limité d'ordre n (en abrégé DLn) en un point x_0 lorsqu'il existe des nombres a_0, a_1, ..., a_n tels que, sur un voisinage de x_0, on ait

$$f(x) = a_0 \ + \ a_1 \ (x - x_0) \ + \cdots + \ a_n(x - x_0)^n \ + \ o\left((x - x_0)^n\right) \ .$$

On admettra qu'un tel DLn, s'il existe, est unique.

2.2 Formule de Taylor-Young

La propriété suivante sera admise :

Propriété 2.1. *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage d'un point x_0. Alors on a le DL2 suivant de f au voisinage de x_0 :*

$$f(x) = f(x_0) \ + \ f'(x_0) \ (x - x_0) + \ \frac{f''(x_0)}{2} \ (x - x_0)^2 \ + \ o\left((x - x_0)^2\right) \ .$$

Remarque 2.2. *Le début du DL2 (qui est celui du DL1 également) donne l'équation de la tangente à la courbe en x_0.*

Propriété 2.3 (DL2 en 0 des fonctions usuelles)**.**

- $\ln(1+x) = x - \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^2)$
- $e^x = 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

Pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2)$

Démonstration :

2.3 Règles d'utilisation

Les règles formelles d'utilisation ne sont pas exigibles. On donne quelques exemples cependant.
Addition : On a vu que les équivalents ne pouvaient êtres additionnés. Les DL2 permettent souvent de régler ce problème.

Exemple 2.4. *Déterminer le DL2 en* 0 *puis un équivalent de* $e^x - 1 - \ln(1+x)$.

Produit : Lorsque l'on fait le produit de deux DL2, on obtient à nouveau un DL2. La règle est (en résumé) la suivante : on multiplie les parties polynômiales des DL2 et on ne garde que les puissances inférieures ou égales à deux.

Exemple 2.5. *Déterminer le DL2 en* 0 *de* $e^x(1+x)^{-2}$.

Substitution : Comme pour les équivalents, on peut substituer, dans un DL en 0, une fonction qui tend vers 0 à x.

Exemple 2.6. *Déterminer le DL2 en* 0 *de* $\ln(1+2x)$.

Changement de variable : Cet exemple est en fait très proche du précédent, mais présenté un peut différemment.

Exemple 2.7. *Déterminer le DL2 en* -1 *de* $\ln(2+x)$.

2.4 Position d'une courbe par rapport à sa tangente

Une autre application du DL2 est la détermination de la position d'une courbe par rapport à sa tangente (les propriétés ci-dessous son admises).

Propriété 2.8. *Soit f une fonction admettant au voisinage d'un point x_0 le DL2 :*

$$f(x) = a_0 + a_1\ (x-x_0)\ +\ a_2\ (x-x_0)^2\ +\ o((x-x_0)^2)\ .$$

Alors

- *si $a_2 > 0$, la courbe représentative de f est au-dessus de sa tangente au voisinage du point x_0 ;*
- *si $a_2 < 0$, la courbe représentative de f est au-dessous de sa tangente au voisinage du point x_0 ;*
- *si $a_2 = 0$, on ne peut pas conclure par cette méthode.*

Corollaire 2.9. *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage d'un point x_0. Alors*

- *si $f''(x_0) > 0$, la courbe représentative de f est au-dessus de sa tangente au voisinage du point x_0 ;*
- *si $f''(x_0) < 0$, la courbe représentative de f est au-dessous de sa tangente au voisinage du point x_0 ;*
- *si $f''(x_0) = 0$, on ne peut pas conclure par cette méthode.*