Corrigé du DS n°1

le 12/09/2025
Durée : 2h

— L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
— La clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une grande part dans la notation.
— Le résultat d'une question peut être admis afin de traiter une question suivante.
— On encadrera le résultat de chaque question.

Exercice 1

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right).$

2. $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} 5\ \frac{2^{k+1}}{3^k} = \sum_{k=3}^{n} 5\times 2\ \left(\frac{2}{3}\right)^k = 10\times\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{80}{9}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\right).$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{31} n = \frac{31\times 32}{2} = 496.$

4. $\displaystyle\sum_{k=3}^{n}(3k-1) = (n-2)\ \frac{8+(3n-1)}{2} = \frac{(n-2)(3n+7)}{2}.$

5. $\displaystyle\sum_{n=2}^{10} n^2 = \sum_{n=1}^{10} n^2\ -\ 1^2 = \frac{10\times 11\times 21}{6} - 1 = 384.$

6. $f'(x) = (-3x^2+3)\,e^{-x^3+3x+1}.$

7. $f'(x) = \dfrac{\dfrac{2(x^2+x+1)-2x(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}}{\dfrac{2x}{x^2+x+1}} = \dfrac{-2x^2+2}{2x(x^2+x+1)}.$

8. $f(x) = (x^3+2x^2)^{-2}.$
   $f'(x) = (-2)(3x^2+4x)(x^3+2x^2)^{-3} = \dfrac{-2(3x^2+4x)}{(x^3+2x^2)^3}$

9. En $+\infty$, $-x^3+3x+1 \sim -x^3$; donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -x^3+3x+1 = -\infty.$
   Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$

10. En $-\infty$, $-x^3+3x+1 \sim -x^3$; donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} -x^3+3x+1 = +\infty.$
    Donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$

11. En $+\infty$, $\dfrac{2x}{x^2+x+1} \sim \dfrac{2x}{x^2} \sim \dfrac{2}{x}$; donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x^2+x+1} = 0$.
Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

12. En 0, $\dfrac{2x}{x^2+x+1} \sim \dfrac{2x}{1} \sim 2x$; donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x}{x^2+x+1} = 0$.
Donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

13. En $+\infty$, $f(x) \sim \dfrac{xe^x}{x^2} \sim \dfrac{e^x}{x}$.
Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (croissances comparées).
Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

14. $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} e^x = e$ et $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} x^2 - 1 = 0^+$. Donc $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$.

15. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\ e^{\sqrt{x}} = 2\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ e^{\sqrt{x}} = 2u'(x)e^{u(x)}$, avec $u(x) = \sqrt{x}$.
On en déduit une primitive F : $F(x) = 2e^{u(x)} = 2e^{\sqrt{x}}$.

16. $f(x) = \dfrac{7}{2x+1} = \dfrac{7}{2}\ \dfrac{2}{2x+1} = \dfrac{7}{2}\ \dfrac{u'(x)}{u(x)}$, avec $u(x) = 2x+1$.
On en déduit une primitive F : $F(x) = \dfrac{7}{2}\ \ln(u(x)) = \dfrac{7}{2}\ \ln(2x+1)$.

17. $f(x) = \dfrac{x}{(2x^2+1)^3} = \dfrac{1}{4}\ 4x\ (2x^2+1)^{-3} = \dfrac{1}{4}\ u'(x)\ (u(x))^{-3}$, avec $u(x) = 2x^2+1$.
On en déduit une primitive F : $F(x) = \dfrac{1}{4}\ \dfrac{(u(x))^{-2}}{-2} = -\dfrac{1}{8(2x^2+1)^2}$.

18. $\displaystyle\int_0^1 (x+\sqrt{x})\ \mathrm{d}x\ =\ \int_0^1 (x+x^{1/2})\ \mathrm{d}x\ =\ \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1\ =\ \frac{1}{2}+\frac{2}{3} = \frac{7}{6}$.

19. $\displaystyle\int_0^1 e^{2x}\ \mathrm{d}x\ =\ \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1\ =\ \frac{1}{2}\left(e^2-1\right)$.

20. $\displaystyle\int_1^2 x\ \ln(x)\ \mathrm{d}x\ =\ \int_1^2 v'(x)u(x)\ \mathrm{d}x$, avec :

$$u(x) = \ln(x) \qquad u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$v'(x) = x \qquad v(x) = \frac{1}{2}x^2$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$, on peut donc utiliser la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_1^2 x\ \ln(x)\ \mathrm{d}x\ &=\ [u(x)v(x)]_1^2\ -\ \int_1^2 u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x \\
&=\ \left[\frac{1}{2}x^2\ln(x)\right]_1^2\ -\ \int_1^2 \frac{1}{2}x\ \mathrm{d}x \\
&=\ 2\ln(2)\ -\ \left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^2 \\
&=\ 2\ln(2)\ -\ \left(1-\frac{1}{4}\right) \\
&=\ 2\ln(2)\ -\ \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Exercice 2 :

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (-x-1)e^x + 1$.

1. Soit $x \leq -1$, alors $(-x-1) \geq 0$, et, comme $e^x > 0$, $g(x) \geq 1 > 0$.
2. La fonction g est dérivable comme somme et produit de fonctions dérivables. Sa dérivée g' a pour expression, pour tout $x \geq 0$:
$$g'(x) = (-1)e^x + (-x-1)e^x = (-x-2)e^x \ .$$
3. Le signe de $g'(x)$ est pour tout x le même que celui de $(-x-2)$, d'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	$1+e^{-2}$	$\searrow$	

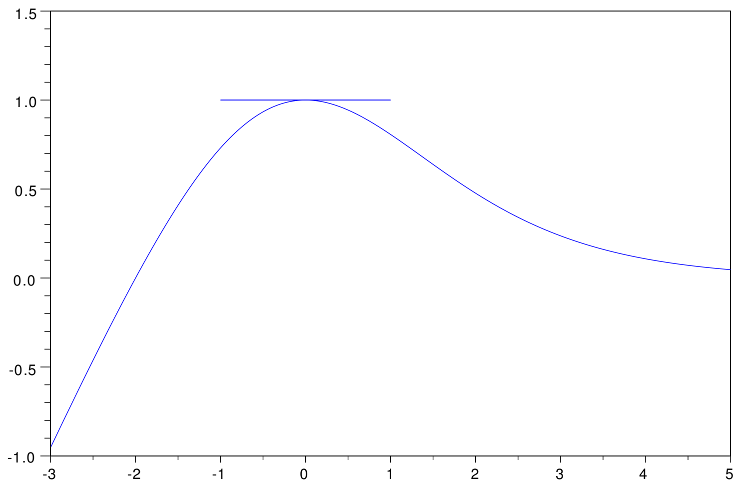
4. On a $g(0) = 0$. On sait déjà que si $x \leq -1$ alors $g(x) > 0$. En utilisant le tableau de variations on obtient de plus :
— Comme g est décroissante sur $[-1; 0]$ et $g(0) = 0$, si $-1 \leq x \leq 0$ alors $g(x) \geq 0$.
— Comme g est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$ et $g(0) = 0$, si $x > 0$ alors $g(x) < 0$.
En conclusion on a bien :
$$g(x) < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x > 0 \ .$$

Partie B : Étude de la fonction f

1. On a pour tout $x > 0$,
$$f(x) = \frac{x}{e^x} \times \frac{1 + 2/x}{1 + 1/e^x} \ .$$
D'après le théorème de croissances comparées exponentielle/puissance, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ et par ailleurs, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1+2/x}{1+1/e^x} = 1$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
Graphiquement, cela se traduit par le fait que l'axe des abscisses est asymptote à la courbe représentative de f.
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} x + 2 = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x + 1 = 1$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.
3. La fonction f est dérivable comme quotient de fonctions dérivables ; sa dérivée a pour expression, pour tout x dans $\mathbb{R}$,
$$f'(x) = \frac{(e^x+1) - (x+2)e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{1 - (x+1)e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{g(x)}{(e^x+1)^2} \ .$$
4. On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ est du même signe que $g(x)$; et en utilisant le résultat de la question 4. de la partie A, on obtient le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

5. Représentation graphique de f :



Partie C : Étude d'une suite

1. La fonction f est continue (quotient de fonctions continues) et strictement décroissante sur $[0;+\infty[$. D'après le théorème de la bijection continue, f établit donc une bijection de $[0;+\infty[$ sur son image.
   Comme $f(0)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, cette image est $]0;1]$.
2. Soit n un entier strictement positif. Alors $1/n \in]0;1]$, et comme f est une bijection de $[0;+\infty[$ sur $]0;1]$, l'équation $f(x)=1/n$ admet une unique solution sur $[0;+\infty[$.
   On note cette unique solution u_n.
3. Comme $f(0)=1$, $u_1=0$. Comme $f(1)>1/2$ et $f(2)<1/2$, $1<u_2<2$.
4. On remarque tout d'abord que $u_n = f^{-1}(1/n)$.
   Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to0} f^{-1}(x)=+\infty$. Et donc, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1/n=0$,
   $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} f^{-1}(1/n) = \lim_{x\to0} f^{-1}(x) = +\infty\ .$$