DS n°1

le 12/09/2025
Durée : 2h

— L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
— La clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une grande part dans la notation.
— Le résultat d'une question peut être admis afin de traiter une question suivante.
— On encadrera le résultat de chaque question.

Exercice 1

1. Calculer (exprimer en fonction de n) : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k$.
2. Calculer (exprimer en fonction de n) : $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} 5\ \frac{2^{k+1}}{3^k}$.
3. Calculer : $\displaystyle\sum_{n=1}^{31} n$
4. Calculer (exprimer en fonction de n) : $\displaystyle\sum_{k=3}^{n}(3k-1)$.
5. Calculer $\displaystyle\sum_{n=2}^{10} n^2$.
6. Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x^3+3x+1}$.
7. Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x}{x^2+x+1}\right)$.
8. Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \dfrac{1}{(x^3+2x^2)^2}$.
9. Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x^3+3x+1}$.
10. Déterminer la limite en $-\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x^3+3x+1}$.
11. Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x}{x^2+x+1}\right)$.
12. Déterminer la limite en 0 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x}{x^2+x+1}\right)$.
13. Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur $]1;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{xe^x}{x^2-1}$.
14. Déterminer la limite en 1 de la fonction f définie sur $]1;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{xe^x}{x^2-1}$.
15. Déterminer une primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\, e^{\sqrt{x}}$.
16. Déterminer une primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \dfrac{7}{2x+1}$.
17. Déterminer une primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{(2x^2+1)^3}$.
18. Calculer $\displaystyle\int_0^1 (x+\sqrt{x})\ \mathrm{d}x$.
19. Calculer $\displaystyle\int_0^1 e^{2x}\ \mathrm{d}x$.
20. Calculer à l'aide d'une intégration par parties $\displaystyle\int_1^2 x\ \ln(x)\ \mathrm{d}x$.

Exercice 2 :

Les parties de ce problème sont largement indépendantes ; on peut admettre le résultat d'une question de l'une et l'utiliser dans une autre en l'indiquant clairement.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x+2}{e^x+1}$.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (-x-1)e^x + 1$.

1. Montrer que si $x \leq -1$, alors $g(x) > 0$.
2. Justifier le fait que g est dérivable et déterminer sa dérivée g'.
3. Établir le tableau de variations de g (on ne demande pas les limites).
4. Calculer $g(0)$ et montrer que l'on a, pour tout x dans $\mathbb{R}$:

$$g(x) < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x > 0 \ .$$

Partie B : Étude de la fonction f

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.
2. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
3. Justifier le fait que f est dérivable, déterminer la dérivée f' de f et vérifier que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(e^x+1)^2}$.
4. En déduire le tableau de variations de f.
5. Tracer la représentation graphique de f. On fera apparaître la tangente horizontale.
   On donne pour cela le tableau de valeurs approchées suivant :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	$-0,95$	0	$0,73$	1	$0,81$	$0,48$	$0,24$	$0,11$

Partie C : Étude d'une suite

Dans cette partie, on s'intéresse à la restriction de f à l'intervalle $[0;+\infty[$, que l'on note toujours f.

1. Montrer que f établit une bijection de $[0;+\infty[$ sur un intervalle à préciser.
2. Montrer que pour tout entier $n > 0$, l'équation $f(x) = 1/n$ admet une unique solution sur $[0;+\infty[$. On note cette unique solution u_n.
3. Que vaut u_1 ? Donner un encadrement de u_2 entre deux entiers.
4. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ lorsque n tend vers $+\infty$ (on pourra utiliser le tableau de variations de f^{-1}).