DS n°2

le 19/09/2025
Durée : 2h

— L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
— La clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une grande part dans la notation.
— Le résultat d'une question peut être admis afin de traiter une question suivante.
— On encadrera le résultat de chaque question.

Exercice 1

1. Calculer (on ne demande pas de justifier la convergence) : $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k$.
2. Calculer (on ne demande pas de justifier la convergence) : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{2}{3}\right)^k$.
3. Calculer (on ne demande pas de justifier la convergence) : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \left(\frac{2}{3}\right)^k$.
4. Calculer (on ne demande pas de justifier la convergence) : $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{5^k}{k!}$.
5. Calculer (on ne demande pas de justifier la convergence) : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{5^k}{k!}$.

Exercice 2 :

On donne : $0,69 < \ln 2 < 0,70$ et $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$.

Partie A

On considère l'application :

$$g \ :]0;+\infty[\to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto g(x) = x^2 + \ln x \ .$$

1. Déterminer les limites de g en 0 et $+\infty$.
2. Montrer que g strictement croissante.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule dans $]0;+\infty[$.
   On note α l'unique solution de cette équation.
4. Montrer que $1/2 < \alpha < 1$.
5. Déterminer le signe de $g(x)$ selon la valeur de x.

Partie B

On note $I = [1/2; 1]$ et on considère l'application :

$$f \ : \ I \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto f(x) = x - \frac{1}{4}\left(x^2 + \ln x\right) \ .$$

1. Montrer que f est strictement croissante sur I.
2. Que vaut $f(\alpha)$?
3. En déduire : $\forall x \in [\alpha; 1]$, $f(x) \in [\alpha; 1]$.
4. Déterminer le signe de $f(x) - x$ pour $x \in I$.

Partie C

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Compléter la fonction python `f` suivante afin qu'elle renvoie la valeur de $f(x)$:

```
def f(x):
    ...
    return y
```

   On suppose la fonction `log` (pour ln) importée du module numpy.
2. Écrire une fonction python `u(n)` qui renvoie la valeur de u_n :
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [\alpha; 1]$.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
5. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 3

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4 \ .$$

1. (a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ a une unique solution dans $]0; +\infty[$; on la note u_n.
   (b) Calculer u_1 et u_2.
   (c) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in]0; 2/3[$.
2. (a) Montrer que, pour tout x élément de $]0, 1[$, on a : $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
   (b) En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$; puis montrer que la suite (u_n) est croissante.
   (c) Montrer que la suite (u_n) est convergente. On note l sa limite.
3. (a) Déterminer la limite de (u_n^n).
   (b) Déterminer la valeur de l.
4. Montrer que la série de terme général $\dfrac{2}{3} - u_n$ est convergente.