ESPACES VECTORIELS

1 Notion d'espace vectoriel

Un espace vectoriel est un ensemble muni d'opérations respectant certaines règles de calcul. Cette notion a été abordée en première année en traitant l'exemple des matrices colonnes. Rappelons que l'on peut additionner deux matrices colonnes, multiplier une matrice colonne par un réel, que ces opérations vérifient certaines propiétés, par exemple la distributivité :

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ , \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \right) = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} .$$

Historiquement, la notion abstraite d'espace vectoriel s'est dégagée au XIX-ème siècle en remarquant que certains espaces partageaient les propriétés de calcul de ces espaces de matrices colonnes.
De nombreux problèmes issus de la physique ou de l'économie trouvent une formulation utilisant le calcul matriciel ainsi que ces espaces. Dans notre programme, les applications seront : l'étude des points critiques des fonctions de deux variables, les chaînes de Markov, les systèmes différentiels.
Le programme indique que nous devons faire le moins possible de théorie au sujet de ces espaces. Pour exprimer les propriétés générales, nous utiliserons cependant la notation $\overrightarrow{u}$.

Définition 1.1. *Soit E un ensemble muni*

1. *d'une loi de composition interne, notée $+$ et appelée addition :* $\begin{array}{ccc} E\times E & \longrightarrow & E \\ (\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) & \mapsto & \overrightarrow{u}+\overrightarrow{v} \end{array}$;
2. *d'une loi de composition externe, notée . :* $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda,\overrightarrow{u}) & \mapsto & \lambda.\overrightarrow{u} \end{array}$.

On dit que $(E,+,.)$ (ou simplement E s'il n'y a pas de risque de confusion sur les lois de composition) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (ou espace vectoriel tout court pour nous) si :

1. (a) *la loi $+$ admet un élément neutre noté $\overrightarrow{0_E}$ tel que :*
$$\forall \overrightarrow{u} \in E,\ \overrightarrow{0_E}+\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u}+\overrightarrow{0_E}=\overrightarrow{u},$$
   (b) *la loi $+$ est associative :*
$$\forall \overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\in E, \overrightarrow{u}+(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})=(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})+\overrightarrow{w},$$
   (c) *la loi $+$ est symétrique :*
$$\forall \overrightarrow{u}\in E, \exists \overrightarrow{v}\in E, \overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0_E},$$
   on montre alors que cet élément est unique et on le note $-\overrightarrow{u}$,
   (d) *la loi $+$ est commutative :*
$$\forall \overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\in E, \overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u},$$
2. (a) $\forall \overrightarrow{u}\in E, 1.\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u}$
   (b) $\forall \lambda\in\mathbb{R}, \forall \overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\in E, \lambda.(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})=\lambda.\overrightarrow{u}+\lambda.\overrightarrow{v}$,
   (c) $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2, \forall \overrightarrow{u}\in E, (\lambda+\mu).\overrightarrow{u}=\lambda.\overrightarrow{u}+\mu.\overrightarrow{u}$,
   (d) $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2, \forall \overrightarrow{u}\in E, (\lambda\times\mu).\overrightarrow{u}=\lambda.(\mu.\overrightarrow{u})$.

Vocabulaire : Les éléments de E sont appelés vecteurs et les réels par lesquels on multiplie les vecteurs sont souvent appelés scalaires.

En pratique : On retiendra qu'un espace vectoriel est un ensemble dont les objets peuvent être additionnés et multipliés par un nombre réel ; et que les règles "naturelles" (au sens où elles sont vraies dans les espaces de matrices colonnes) s'y appliquent.

Exemples 1.2. *Ces exemples sont à connaître : ils seront systématiquement le cadre des exercices.*

1. *Le premier exemple est celui qui servait de cadre au cours de première année : l'ensemble, pour n fixé, des matrices colonnes de taille n, noté $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. De la même manière, pour n et p fixés, l'ensemble de matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, muni de l'addition des matrices et de la multiplication par un réel, est un espace vectoriel. L'élément neutre pour l'addition est la matrice nulle.*

2. *Pour n fixé, on munit $\mathbb{R}^n$ de l'addition, définie par*

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \ ;$$

et de la multiplication par un réels définie par

$$\lambda.(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \ .$$

Muni de ces deux opérations, $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel. L'élément neutre pour l'addition est $(0, \dots, 0)$.

3. *Un autre exemple important d'espace vectoriel est l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ou les espaces formés par une partie de ces fonctions).*
Pour n fixé, l'ensemble $\mathbb{R}_n[x]$ des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n, muni de l'addition usuelle et de la multiplication usuelle par un réel est un espace vectoriel. L'élément neutre pour l'addition est la fonction nulle.

Remarque 1.3. *La définition générale a été donnée avec des "$\to$" sur les vecteurs, mais dans les exercices, on adaptera les notations au contexte (matrices, polynômes ...). De même, le "." pour la multiplication sera la plupart du temps omis.*

Définition 1.4 (Combinaison linéaire)**.** *Étant donnés des vecteurs $\overrightarrow{u_1}$, ... , $\overrightarrow{u_m}$ de E, on appelle combinaison linéaire de ces vecteurs tout éléments $\overrightarrow{u}$ de E pouvant s'écrire*

$$\overrightarrow{u} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \ \overrightarrow{u_i} \ ,$$

où $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$.

Remarque 1.5. *Les règles de calcul se traduisent ainsi sur les combinaisons linéaires :*

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i)\overrightarrow{u_i} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{u_i} \ + \ \sum_{i=1}^{n} \mu_i \overrightarrow{u_i} \quad \textit{et} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha\lambda_i \overrightarrow{u_i} = \alpha \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{u_i}$$

2 Sous-espace vectoriel

On désigne dans cette partie par $(E, +, .)$ un espace vectoriel.

2.1 Définition et caractérisation

Définition 2.1. *Un sous-ensemble F de E est un sous-espace vectoriel (SEV) de E si, muni des lois $+$ et ., il est lui-même un espace vectoriel.*

On n'a pas besoin de vérifier tous les points de la définition d'un espace vectoriel pour vérifier qu'un sous ensemble est un SEV de E ; on utilisera plutôt la caractérisation suivante :

Propriété 2.2 (Admise)**.** *Un sous-ensemble F de E est un SEV si et seulement si :*

- $\overrightarrow{0_E} \in F$ *;*
- *F est stable par combinaisons linéaires, c'est à dire :*

$$\forall (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) \in F^2, \ \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \lambda_1.\overrightarrow{u_1} + \lambda_2.\overrightarrow{u_2} \in F \ .$$

Remarque 2.3. *Un SEV est stable par combinaison linéaire d'un nombre quelconque de vecteurs.*

Exemples 2.4.

1. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ AM = 0_n\}$. Montrer que F est un SEV de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*
2. *On pose $F = \{P \in \mathbb{R}_3[x] \ / \ P(1) + P(2) = 0\}$. Montrer que F est un SEV de $\mathbb{R}_3[x]$.*

2.2 Sous espace vectoriel engendré

Propriété 2.5. *Étant donnée une partie $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_m}\}$ à m éléments de E, l'ensemble F des combinaisons linéaires de ses éléments, c'est à dire*

$$F = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \ \overrightarrow{u_i}, \ (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m \right\},$$

est un SEV de E, appelé SEV engendré par $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_m}\}$ et noté $\operatorname{Vect}\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_m}\}$.

Démonstration :

Exemple 2.6. *Montrer que* $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ *est un SEV de* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Propriété 2.7. *Étant donnée une partie* $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_m}\}$ *d'éléments de* E*, si* $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_m}\}$*, alors*

$$\mathrm{Vect}\left\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_m}, \overrightarrow{u}\right\} = \mathrm{Vect}\left\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_m}\right\}\ .$$

Démonstration :

Propriété 2.8. *Soit* F *un SEV de* E*, et* $\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n}$ *des éléments de* F*. Alors*

$$\mathrm{Vect}\{\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n}\} \subset F\ .$$

Démonstration :

3 Bases et dimension

On désigne dans cette partie par $(E,+,.)$ un espace vectoriel. On appelle famille (finie) d'éléments de E tout m-uplet $(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\dots,\overrightarrow{u_m})\in E^m$.

3.1 Familles libres et génératrices, bases

Définition 3.1. *Une famille $(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\dots,\overrightarrow{u_m})$ d'éléments de E est dite génératrice d'un SEV F de E lorsque*

$$F=\operatorname{Vect}\{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\dots,\overrightarrow{u_m}\}\ .$$

Définition 3.2. *Une famille $(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\dots,\overrightarrow{u_m})$ d'éléments de E est dite libre lorsque*

$$\forall(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\in\mathbb{R}^m,\quad \sum_{i=1}^m \lambda_i\ \overrightarrow{u_i}=\overrightarrow{0_E}\quad\Rightarrow\quad \lambda_1=\cdots=\lambda_m=0\ .$$

On dit également que ces vecteurs sont linéairement indépendants. Dans le cas contraire, on dit qu'ils sont liés.

Remarque 3.3. *Intuitivement, des vecteurs sont liés si on peut exprimer l'un en fonction des autres.*

Exemples 3.4.

1. *Dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, montrer que les vecteurs $\begin{pmatrix}1/2\\1/3\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ forment une famille liée.*
2. *Dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, montrer que les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ forment une famille liée.*

Remarques 3.5.

- *Une famille contenant le vecteur nul ne peut pas être libre.*
- *Une famille contenant deux fois le même vecteur ne peut pas être libre.*

Propriété 3.6. *Si on rajoute un élément à une famille liée, on obtient une famille liée.*
Si on enlève un élément à une famille libre, on obtient une famille libre.

Démonstration :

Cas particuliers importants (voir TD pour la démonstration) :

- Une famille formée d'un unique vecteur est libre si et seulement si ce vecteur est non nul.
- Une famille formée de deux vecteurs est libre si et seulement si ces vecteurs ne sont pas colinéaires.

Exemples 3.7. *Montrer que* $P_1 : x \mapsto x+1$, $P_2 : x \mapsto x-1$ *et* $P_3 : x \mapsto x^2$ *forment une famille libre dans* $\mathbb{R}_2[x]$.

Définition 3.8. *Une famille d'éléments d'un espace vectoriel* E *est appelée base de* E *lorqu'elle est libre et génératrice.*

Propriété 3.9 (Admise)**.** *Une famille* $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_m})$ *d'éléments de* E *est une base de* E *si et seulement si tout élement de* $\overrightarrow{u} \in E$ *s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire de* $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_m}$ *:*

$$\overrightarrow{u} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \ \overrightarrow{u_i} \ .$$

Les λ_i *sont alors appelés coordonnés de* $\overrightarrow{u}$ *dans la base* $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_m})$.

Bases canoniques : Certaines bases apparaissent naturellement dans les exemples usuels d'espaces vectoriels. On les qualifie de "canoniques".

1. Dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, notons $E_{i,j}$ la matrice ayant un 1 sur la i-ème ligne et j-ème colonne et des 0 ailleurs. Alors une matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ s'écrit
$$A = \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} a_{i,j} E_{i,j} \text{ (et il est clair que cette écriture est unique).}$$

Exemple 3.10. *Déterminer les coordonnées de* $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ *dans la base canonique de* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Les espaces de matrices colonnes $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sont des cas particuliers du précédent. Les espace $\mathbb{R}^n$ sont similaires : la base canonique est formée par les vecteurs ayant un 1 et des 0 ailleurs.

Exemple 3.11. *Écrire la décomposition de* $(-6, 7, 2)$ *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^3$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $i \in \{0, \dots, n\}$, on note P_i l'élément de $\mathbb{R}_n[x]$ défini par $P_i : x \mapsto x$. Alors $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$, appelée base canonique. Cela traduit l'unicité de l'écriture d'un polynôme de degré n.

3.2 Dimension

Définition 3.12. *Un espace vectoriel E non réduit à $\{\overrightarrow{0_E}\}$ est dit de dimension finie lorsqu'il admet une base contenant un nombre fini d'éléments.*

Théorème 3.13 (Admis)**.** *Si un espace vectoriel E est de dimension finie, alors il admet (au moins) une base et toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments. Ce nombre est appelé dimension de E, et noté* $\dim(E)$*.*
Par convention, un espace vectoriel réduit à $\{\overrightarrow{0_E}\}$ a pour dimension 0*.*

Exemples 3.14. *Montrer que les espaces vectoriels suivants sont de dimension finie et déterminer celle-ci*

1. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$
2. $\mathbb{R}^n$
3. $\mathbb{R}_n[x]$

Dans un espace vectoriel de dimension finie, le nombre d'éléments d'une base est fixe ; le nombre d'éléments dans une famille libre ou génératrice est également contraint.

Propriété 3.15 (Admis)**.** *Soit E un espace vectoriel de dimension n. Alors :*

- *Une famille libre a au plus n éléments.*
- *Une famille génératrice a au moins n éléments.*

Propriété 3.16 (Admis)**.** *Soit E un espace vectoriel de dimension n. Alors :*

- *Une famille libre ayant n éléments est une base de E.*
- *Une famille génératrice ayant n éléments est une base de E.*

Exemples 3.17.

1. *La famille $((1,0,4),(3,7,1))$ est-elle génératrice dans $\mathbb{R}^3$?*
2. *Montrer que $((1,0),(3,1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.*

Propriété 3.18 (Admis)**.** *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Si F est un SEV de E, alors F est de dimension finie et* $\dim(F) \leq \dim(E)$*.*
De plus, $\dim(F) = \dim(E)$ *si et seulement si $E = F$.*

3.3 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 3.19. *On appelle rang d'une famille* $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_m})$ *d'éléments de* E *la dimension de* $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_m})$. *On le note* $\mathrm{rg}\,(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_m})$.

On étend la définition du rang aux matrices.

Définition 3.20. *Soit* $A \in \mathcal{M}_{n,p}$. *On appelle rang de* A *le rang de la famille formée par ses colonnes, considérés comme des vecteurs de* $\mathcal{M}_{n,1}$. *On le note* $rg(A)$.

Rappel : transposée d'une matrice Compléter :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad ; \qquad {}^tA = \dots$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \qquad ; \qquad {}^tB = \dots$$

Propriété 3.21 (Admis)**.** *Soit* $A \in \mathcal{M}_{n,p}$. *On a alors* $rg({}^tA) = rg(A)$.