Corrigé du DS n°2

le 19/09/2025
Durée : 2h

- L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
- La clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une grande part dans la notation.
- Le résultat d'une question peut être admis afin de traiter une question suivante.
- On encadrera le résultat de chaque question.

Exercice 1

1. $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k=\left(\frac{2}{3}\right)^2\ \frac{1}{1-2/3}=\frac{4}{3}$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}k\left(\frac{2}{3}\right)^k=\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{+\infty}k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}=\frac{2}{3}\ \frac{1}{(1-2/3)^2}=6.$

3.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty}k^2\left(\frac{2}{3}\right)^k &= \sum_{k=1}^{+\infty}(k(k-1)+k)\left(\frac{2}{3}\right)^k\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}k(k-1)\left(\frac{2}{3}\right)^k+\sum_{k=1}^{+\infty}k\left(\frac{2}{3}\right)^k\\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^2\sum_{k=2}^{+\infty}k(k-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}+\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{+\infty}k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^2\ \frac{2}{(1-2/3)^3}+\frac{2}{3}\ \frac{1}{(1-2/3)^2}\\
&= 24+6\\
&= 30
\end{aligned}$$

4. $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{5^k}{k!}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{5^k}{k!}-\left(\frac{5^0}{0!}+\frac{5^1}{1!}\right)=e^5-6.$

5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}k\frac{5^k}{k!}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{5^k}{(k-1)!}=5\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{5^{k-1}}{(k-1)!}=5\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{5^j}{(j)!}=5e^5.$

Exercice 2 :

Partie A

1. On a $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ et $\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$; donc $\lim_{x\to 0} g(x) = -\infty$.
   0n a $\lim_{x\to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$; donc $\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$.
2. La fonction g est la somme de deux fonctions dérivables, donc g est dérivable ; et on a, pour $x \in]0; +\infty[$, $g'(x) = 2x + 1/x$.
   Or pour $x > 0$, $2x > 0$ et $1/x > 0$, donc $g'(x) > 0$.
   Donc g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
3. La fonction g est la somme de deux fonctions continues, donc elle est continue.
   Comme g est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$, elle établit, d'après le théorème de la bijection continue, une bijection de $]0; +\infty[$ sur son image qui est, vu les limites de g, l'intervalle $] - \infty; +\infty[$, c'est à dire $\mathbb{R}$.
   0n en déduit (comme $0 \in \mathbb{R}$), que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0; +\infty[$.
4. $g(1/2) = 1/4 + \ln(1/2) = 1/4 - \ln 2 < 1/4 - 0,69 < 0$ et $g(1) = 1 > 0$. Donc, comme g est croissante, $1/2 < \alpha < 1$.
5. Comme g est strictement croissante et $g(\alpha) = 0$, le signe de $g(x)$ est donné par le tableau suivant :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B Remarquons que $f(x) = x - \dfrac{1}{4}g(x)$.

1. La fonction f est dérivable car somme de fonctions dérivables ; et, pour tout $x > 0$,
$$f'(x) = 1 - \frac{1}{4}g'(x) = 1 - \frac{1}{4}\left(2x + \frac{1}{x}\right) = \frac{4x - 2x^2 - 1}{4x}$$
   Le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $(-2x^2+4x-1)$. Étudions le signe de ce trinôme : $\Delta = 8$; ses racines sont donc
$$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{8}}{-4} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$
   et
$$x_2 = \frac{-4 + \sqrt{8}}{-4} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} .$$
   On remarque que $x_1 > 1$ et $x_2 < 1/2$ donc, comme $(-2x^2 + 4x - 1)$ est positif entre ses racines, $f'(x) > 0$ sur I et donc f est strictement croissante sur I.
2. $f(\alpha) = \alpha - \dfrac{1}{4}g(\alpha) = \alpha$.
3. $f(1) = 3/4 < 1$ et $f(\alpha) = \alpha$.
   Comme de plus f est croissante, si $x \in [\alpha; 1]$, alors $f(x) \in [\alpha; f(1)] \subset [\alpha; 1]$.
4. Pour $x \in I$, $f(x) - x = -\dfrac{1}{4}g(x)$; donc $f(x) - x$ est de signe contraire de $g(x)$.
   En utilisant le résultat de la question A.5 et le fait que $1/2 < \alpha < 1$, on obtient le tableau de signe suivant :

x	$1/2$ α 1
$f(x)-x$	$+$ 0 $-$

Partie C

1.
```
def f(x) :
    y = x-0.25*(x**2+log(x))
    return y
```

2.
```
def u(n) :
    res = 1
    for i in  range(1,n+1):
        res = f(res)
    return res
```

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}_n$ la propriété $u_n \in [\alpha; 1]$.
   — Comme $u_0 = 1$, $\mathcal{P}_0$ est vérifiée.
   — Soit $n \geq 0$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vérifiée.
   Comme par hypothèse de récurrence $u_n \in [\alpha; 1]$, d'après le résultat de la question B.3, $f(u_n) \in [\alpha; 1]$; c'est à dire $u_{n+1} \in [\alpha; 1]$.
   Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée.
   — On en conclut, en application du principe de récurrence, que $\mathcal{P}_n$ est vérifiée pour tout n.
4. Soit $n \geq 1$. On a alors :
$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \ .$$
   Mais comme $u_n \in [\alpha; 1]$, cela entraîne, d'après le résultat de la question B.4,
$$u_{n+1} - u_n \leq 0 \ .$$
   Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
5. On a montré à la question précédente que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Comme de plus elle est minorée (par $1/2$), elle converge.
   Comme f est continue, la limite l de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est solution de $f(x) = x$ (et appartient à I). Or
$$f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}(x^2 + \ln x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \ .$$
   On a montré dans la partie A que l'unique solution de cette équation est α. On en conclut :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha \ .$$

Exercice 3

1. (a) Soit n un entier supérieur ou égal à 1.
   Étudions tout d'abord f_n :
   — f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme) et pour $x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = nx^{n-1} + 18x$.
   Si $x > 0$, $f_n'(x) > 0$; donc f_n est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
   — $f_n(0) = -4$ et $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$.

La fonction f_n a les propriétés suivantes sur $[0;+\infty[$:
— elle est continue (fonction polynôme) ;
— elle est strictement croissante ;
— $f_n(0) = -4$ et $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.
Donc, d'après le théorème de la bijection continue, f_n établit une bijection de $[0;+\infty[$ sur $[-4;+\infty[$.
De plus, $0 \in [-4;+\infty[$; donc l'équation $f_n(x) = 0$ a une unique solution u_n dans $[0;+\infty[$, et même dans $]0;+\infty[$ car $f_n(0) \neq 0$.

(b) — u_1 est l'unique solution positive de $f_1(x) = 0$, c'est à dire $x + 9x^2 - 4 = 0$.
On résout : $\Delta = 145$; solutions dans $\mathbb{R}$: $\dfrac{-1-\sqrt{145}}{18}$ et $\dfrac{-1+\sqrt{145}}{18}$.
Seule la seconde solution est positive, donc $u_1 = \dfrac{-1+\sqrt{145}}{18}$.
— u_2 est l'unique solution positive de $f_2(x) = 0$, c'est à dire $x^2 + 9x^2 - 4 = 0$, c'est à dire $10x^2 - 4 = 0$.
Solutions dans $\mathbb{R}$: $\dfrac{2}{\sqrt{10}}$ et $-\dfrac{2}{\sqrt{10}}$.
Seule la première solution est positive, donc $u_2 = \dfrac{2}{\sqrt{10}}$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On a déjà vu que $u_n > 0$.
On a $f_n(2/3) = (2/3)^n + 9\,(2/3)^2 - 4 = (2/3)^n > 0$.
Comme $f_n(2/3) > 0$, $u_n < 2/3$. En effet, sinon on aurait, comme f est croissante, $f_n(u_n) \geq f_n(2/3) > 0$; ce qui est contradictoire avec $f_n(u_n) = 0$.
Conclusion : Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $u_n \in]0;2/3[$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.Soit $x \in]0,1[$.
On a alors $x^{n+1} < x^n$; donc, par addition, $x^{n+1} + 9x^2 - 4 < x^n + 9x^2 - 4$; c'est à dire $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
Conclusion : Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, pour tout x élément de $]0,1[$, on a : $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
D'après le résultat de la question précédente, $f_n(u_{n+1}) > f_{n+1}(u_{n+1})$, et donc $f_n(u_{n+1}) > 0$.
On en déduit que $u_{n+1} > u_n$. En effet, sinon on aurait, comme f_n est croissante, $f(u_{n+1}) \leq f(u_n) = 0$
Comme ceci est vrai pour tout n, on en déduit que la suite (u_n) est croissante.

(c) La suite (u_n) est croissante et majorée (par $2/3$), donc la suite (u_n) est convergente. On note l sa limite.

3. (a) On a vu que pour tout $n \geq 1$, $0 \leq u_n \leq 2/3$.
On a donc $0 \leq (u_n)^n \leq (2/3)^n$.
Comme $\lim(2/3)^n = 0$, par le théorème d'encadrement, on en déduit que $\lim(u_n)^n = 0$.

(b) On a, pour tout $n \geq 1$, $f_n(u_n) = 0$, c'est à dire $(u_n)^n + 9u_n^2 - 4 = 0$.
Or $\lim(u_n)^n = 0$ et $\lim(u_n)^2 = l^2$; donc, par passage à la limite dans l'égalité $(u_n)^n + 9u_n^2 - 4 = 0$, on a $9l^2 - 4 = 0$.
On en déduit que $l = \dfrac{2}{3}$.

4. On repart de l'égalité, valable pour tout $n \geq 1$, $(u_n)^n + 9u_n^2 - 4 = 0$.
On en déduit que $(u_n)^n + (3u_n - 2)(3u_n + 2) = 0$; d'où $(2 - 3u_n)(3u_n + 2) = (u_n)^n$ et donc

$2-3u_n = \dfrac{(u_n)^n}{3u_n+2}$; puis,

$$\frac{2}{3} - u_n = \frac{1}{3(3u_n+2)} \times (u_n)^n \ .$$

En utilisant le fait que $0 \leq u_n \leq 2/3$,

$$0 \leq \frac{2}{3} - u_n \leq \frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \ .$$

Or la série de terme général $\dfrac{1}{6} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ est convergente (série géométrique de raison $(2/3)$) ; donc, par comparaison de séries à termes positifs, la série de terme général $\dfrac{2}{3} - u_n$ est convergente.