Feuille d'exercices n°4 : Espaces vectoriels

1 Méthodes de base

Exercice 1. – Caractérisation d'un SEV – Les sous-ensembles F suivants sont-ils des SEV de E ?

1. $E = \mathbb{R}^4$
   (a) $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x+y-z=0 \text{ et } 2x+y+z-t=0\}$
   (b) $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x^2-y^2=0\}$
2. $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ AM - MA = 0_2\}$
   (b) $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ AM - MA = I_2\}$
3. $E = \mathbb{R}_2[X]$
   (a) $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \ / \ P(0) + P'(0) = 0\}$
   (b) $F = \{(\alpha+\beta)X^2 + \alpha X + \beta \ , \ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\}$

Exercice 2. – Combinaison linéaire –

1. Montrer que $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ est une combinaison linéaire de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ peut-elle s'écrire comme combinaison linéaire de ces trois matrices ?

Exercice 3. – Sous espace vectoriel engendré
Démontrer que l'ensemble : $F = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & b \\ -a & -b \end{pmatrix} \ ; \ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$ et en déterminer une base.

Exercice 4. – Montrer qu'une famille est libre –

1. Montrer que la famille formée par $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est libre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Quelle est la dimension du SEV engendré par ces trois matrices ?

Exercice 5. – Montrer qu'une famille est une base – Montrer que la famille formée par $(1,2,3)$, $(-1,0,2)$ et $(1,4,2)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

1. Directement.
2. En utilisant la dimension.
3. Déterminer les coordonnées de $X = (1,1,1)$ dans cette base.

Exercice 6. – Déterminer une base – Reprendre les exemples de l'exercice 1 qui sont des SEV et déterminer une base de chacun.

Exercice 7. – Rang – On considère les trois vecteurs suivants dans $\mathbb{R}^3$: $(1,-1,3)$, $(2,0,1)$, $(-3,-1,1)$.

1. La famille qu'ils forment est-elle libre ?
2. Déterminer son rang.

Exercice 8. – Rang d'une matrice – Déterminer le rang de chacune des matrices suivantes :

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$
2. $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
3. $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

2 Divers

Exercice 9. – Déterminer si les familles suivantes sont libres ou liées. Déterminer également si chacune de ces familles est génératrice (dans E_i).

1. $\mathcal{F}_1 = ((1,-2),(0,1))$, dans $E_1 = \mathbb{R}^2$
2. $\mathcal{F}_2 = ((2,0,-2),(1,-2,0),(2,-2,-10),(1,1,1))$, dans $E_2 = \mathbb{R}^3$
3. $\mathcal{F}_3 = ((1,1,2),(1,2,-1),(4,5,5))$ dans $E_3 = \mathbb{R}^3$
4. $\mathcal{F}_4 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}\right)$, dans $E_4 = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
5. $\mathcal{F}_5 = (X^2 - X + 1, 2X^2 + X + 1, 2X^2 - 5X + 3)$ dans $E_5 = \mathbb{R}_2[X]$.
6. $\mathcal{F}_6 = (X^2 + 2, X^2 - 3, X^2 + 1)$, dans $E_6 = \mathbb{R}_2[X]$

Exercice 10. – Déterminer parmi les familles suivantes celles qui sont des bases de $\mathbb{R}^4$:

1. $\mathcal{F}_1 = ((1,2,1,8),(1,1,0,1),(1,0,1,-1))$,
2. $\mathcal{F}_2 = ((1,0,0,1),(3,0,2,1),(4,0,2,2),(10,0,0,10))$,
3. $\mathcal{F}_3 = ((1,2,3,4),(2,3,4,5),(1,0,1,0),(2,1,1,2),(1,0,0,0))$.

Exercice 11. – Déterminer la dimension des espaces vectoriels suivants :

1. L'ensemble $F \subset \mathbb{R}^3$ des triplets (x,y,z) tels que $-x + 2y - z = 0$.
2. L'ensemble $F \subset \mathbb{R}_2[X]$ des polynômes P tels que $X\ P' = P$.
3. L'ensemble $F \subset M_2(\mathbb{R})$ des matrices M telles que : $AM = M$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 12. – (extrait de EDHEC 2000)

Soit la matrice $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On note E l'ensemble des matrices $M \in M_3(\mathbb{R})$ telles que $MK = KM = M$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. Montrer par l'absurde qu'aucune matrice de E n'est inversible.
3. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ une matrice de E.
   (a) Montrer que $i = g = c = a$, $h = b$ et $f = d$. En déduire la forme des matrices de E.
   (b) Retrouver le fait que les matrices de E ne sont pas inversibles.
   (c) Déterminer une base de E et vérifier que $\dim E = 4$.

Exercice 13. – Montrer que l'intersection de deux SEV est un SEV

Exercice 14. – On considère une famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ d'éléments de $\mathbb{R}_n[x]$ telle que chaque P_i soit de degré i. Montrer que cette famille est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

Exercice 15. –

1. Montrer qu'une famille constituée d'un unique élément est libre ssi cet élément est non nul.
2. Montre qu'une famille constituée de deux éléments est libres ssi ces deux éléments ne sont pas colinéaires.