Feuille d'exercices n°1 : Comparaison des fonctions

1 Méthodes de base

Exercice 1. – Application des règles de base sur les limites – Déterminer chacune des limites suivantes.

1. $x \mapsto \dfrac{2}{x^5-1}$ en 1^+ et 1^-
2. $x \mapsto \dfrac{e^x}{x-1}$ en 1^+ et 1^-
3. $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ en 0^+
4. $x \mapsto x^2 e^{1/x}$ en $-\infty$
5. $x \mapsto \ln(x^2+x+5)$ en $+\infty$
6. $x \mapsto (x^2+x+5)^x$ en $+\infty$

Exercice 2. – Dérivation – Dériver chacune des fonctions suivantes sur son intervalle de définition I.

1. $f : x \mapsto \dfrac{2}{x^5}$ sur $I =]0;+\infty[$
2. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}e^x$ sur $I =]0;+\infty[$
3. $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ sur $I =]0;+\infty[$
4. $f : x \mapsto e^{x^2+x+5}$ sur $I = \mathbb{R}$
5. $f : x \mapsto \ln(x^2+x+5)$ sur $I = \mathbb{R}$
6. $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x^2+x+5)^3}$ sur $I = \mathbb{R}$
7. $f : x \mapsto \sqrt{x^2+x+5}$ sur $I = \mathbb{R}$
8. $f : x \mapsto (x^2+x+5)^x$ sur $I = \mathbb{R}$

Exercice 3. – Théorème de la bijection continue – On considère la fonction f définie sur $]2;+\infty[$ par

$$f(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{x-2}}}.$$

1. Étudier la fonction f.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution.

Exercice 4. – Utiliser la caractérisation de l'équivalence – Montrer que $x^3+7x^2-3x \underset{0}{\sim} -3x$.

Exercice 5. – Utiliser un équivalent pour déterminer une limite – Déterminer la limite en 0 de
$x \mapsto \dfrac{e^x-1}{1-(1+x)^{3/2}}$.

Exercice 6. – Déterminer des équivalents en 0 et $+\infty$ – Déterminer des équivalents simples (puissances de x) des fonctions suivantes au voisinage de 0 et $+\infty$:

1. $x \mapsto \frac{2x^2+3}{x^4-x^3+x}$,
2. $x \mapsto \sqrt{1+x}-1$,
3. $x \mapsto x^2+2\ln x$.

Exercice 7. – Utiliser un DL2 pour déterminer une limite – Déterminer la limite en 0 de
$x \mapsto \dfrac{x^2+\ln(1+3x)-3x}{2x^2+x^3}$.

Exercice 8. – Utiliser un DL pour établir la continuité et la dérivabilité en un point – On considère la fonction f définie sur $]-1/2;+\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+2x)}{x} \quad \text{si} \quad x \neq 00 \\ 2 \quad \text{si} \quad x = 0 \end{cases} .$$

Montrer que f est continue sur $]-1/2;+\infty[$ puis qu'elle y est dérivable.

Exercice 9. – Utiliser la formule de Taylor-Young pour établir un DL2 – Déterminer le DL2 en 0 de $f : x \mapsto (1+x)e^{x^2+x-1}$.

Exercice 10. – Position d'une courbe par rapport à sa tangente – On reprend $f : x \mapsto (1+x)e^{x^2+x-1}$. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 puis déterminer la position de la courbe par rapport à sa tangente en ce point.

2 Équivalents, développements limités, limites

Exercice 11. – Déterminer des équivalents simples des fonctions suivantes au voisinage de 0 et $+\infty$:

1. $x \mapsto \frac{x^3\ e^x}{\ln x + x^2}$,
2. $x \mapsto \frac{x^2 \ln(x)}{1+x^2}$,
3. $x \mapsto \ln(1+x) - \ln(x)$.

Exercice 12. – Donner les développements limités à l'ordre 2 en 0 des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{2} e^{2x}$,
2. $f : x \mapsto (1+x)^{3/2}$,
3. $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$,
4. $f : x \mapsto e^{2+x}$,
5. $f : x \mapsto (1+x)^2 e^x$,
6. $f : x \mapsto \frac{xe^x}{\sqrt{1+x}}$.

Exercice 13. – Etudier localement au voisinage de 0 (équation de la tangente et positions relatives) les fonctions f suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto \sqrt{1+x} - e^{-x}$,
2. $f_2 : x - \ln(1+x)$,
3. $f_3 : x \mapsto \frac{e^x}{1+x}$.

Exercice 14. – Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \ln(1+x) - 1}{x^2}$,
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{x \ln(1+2x)}$.
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$,

Exercice 15. – En utilisant les DL usuels, déterminer un DL2 en 1 des fonctions suivantes

1. $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^{3/2}}$.
2. $f : x \mapsto \frac{e^x}{\sqrt{x}}$,

Exercice 16. – – En posant $X = 1/x$, étudier au voisinage de $+\infty$ les fonctions f et g définies par :

1. $f(x) = x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$,
2. $g(x) = x(e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{1 + 2/x})$.

3 Études de fonctions

Exercice 17. –
Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $x \mapsto (x-1)e^{\frac{1}{x}}$.

1. Déterminer les limites de f en $\pm\infty$.
2. Étudier les variations de f.
3. La fonction f peut-elle être prolongée par continuité en 0 ?
4. On étudie dans cette question le comportement de f en $\pm\infty$ de manière plus précise. Pour cela, on détermine si f admet une asymptote (oblique), c'est à dire une droite d'équation $y = ax + b$ telle que $f(x) - (ax + b)$ tende vers 0.

   A l'aide d'un développement limité, déterminer une telle asymptote et déterminer la position de la courbe de f par rapport à celle-ci.
5. Tracer la courbe représentative de f.

Exercice 18. – – (EDHEC 2009)
Soit f définie sur $]-\infty, 1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)} & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $]-\infty, 1[$.
2. a) Déterminer le développement limité de $\ln(1-x)$ à l'ordre 2 lorsque x est au voisinage de 0.
   b) En déduire que f est dérivable en 0 puis vérifier que $f'(0) = \frac{1}{2}$.
3. a) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$, puis calculer $f'(x)$ pour tout réel $x \in]-1, 0[\cup]0, 1[$.
   b) Déterminer le signe de la quantité $\ln(1-x) + x$ lorsque x appartient à $]-\infty, 1[$, puis en déduire les variations de f.
   c) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition, puis dresser son tableau de variations.
4. a) Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel u_n tel que $f(u_n) = n$. Préciser la valeur de u_1.
   b) Montrer que la suite (u_n) converge et que

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$$