

Feuille d'exercices n°2 : Compléments sur les suites et les séries

1 Méthodes de base

Exercice 1. – Application des règles de base sur les limites – Déterminer la limite éventuelle de chacune des suites suivantes.

- | | | |
|------------------------------|----------------------------------|--|
| 1. $u_n = e^{1/n}$ | 3. $u_n = \frac{1}{1 - (2/3)^n}$ | 5. $u_n = \frac{2^n}{1 - (3/2)^n}$ |
| 2. $u_n = \ln(n^2) - e^{-n}$ | 4. $u_n = \frac{1}{1 - (3/2)^n}$ | 6. $u_n = \frac{1 - (1/2)^n}{(1/2)^n + (2/3)^n}$ |

Exercice 2. – Sommes finies usuelles – Déterminer chacune des sommes suivantes en fonction de n .

- | | | |
|---------------------------------------|---|----------------------------------|
| 1. $\sum_{k=2}^n \frac{2^k}{3^{k+1}}$ | 2. $\sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{3}k + 1\right)$ | 3. $\sum_{k=2}^n (k^2 + 3k + 1)$ |
|---------------------------------------|---|----------------------------------|

Exercice 3. – Sommes de séries usuelles – Déterminer la somme de chacune des séries suivantes (on justifiera brièvement leur convergence).

- | | | | |
|---|---|--|--|
| 1. $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{3}{2^{k-1}}$ | 2. $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^k}$ | 3. $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{3^{k-1}}{k!}$ | 4. $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{3k^2}{2^{k-1}}$ |
|---|---|--|--|

Exercice 4. – Application du théorème des suites monotones bornées – On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{x^3 + 6x + 1}{9}$. On définit la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ par : $u_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

- | | |
|---|---|
| 1. Étudier sur \mathbb{R} la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$. | 4. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $u_n \in [0, \alpha]$. |
| 2. Montrer que f admet un unique point fixe dans $[0, 1]$ (on le notera α). | 5. Étudier la monotonie de (u_n) . |
| 3. Étudier la fonction f sur $[0, 1]$. | 6. Montrer la convergence de (u_n) et déterminer sa limite. |

Exercice 5. – Application de l'IAF – On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par : $u_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 - \frac{u_n^2}{4}$. On note f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$.

- | | |
|--|--|
| 1. Montrer que pour tout n , $u_n \in [0, 1]$. | [0, 1] et donner la valeur de α . |
| 2. Calculer u_1, u_2 . La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est-elle monotone ? | 5. Montrer que pour tout $n \geq 0$,
$ u_{n+1} - \alpha \leq \frac{1}{2} u_n - \alpha $. |
| 3. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $ f'(x) \leq \frac{1}{2}$. | 6. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $ u_n - \alpha \leq \frac{1}{2^n}$ et conclure quant à la convergence de $(u_n)_{n \geq 0}$. |
| 4. Montrer que f admet un unique point fixe α dans | |

Exercice 6. – Déterminer un équivalent à partir des équivalents classiques – Déterminer un équivalent simple de chacune des suites suivantes.

- | | | | |
|--|--|----------------------------------|-----------------------------|
| 1. $u_n = \frac{n^2 + 4n - 4}{\sqrt{n} + 3}$ | 2. $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}$ | 3. $u_n = \frac{e^{1/n} - 1}{n}$ | 4. $u_n = n^2 \ln(1 + 1/n)$ |
|--|--|----------------------------------|-----------------------------|

Exercice 7. – Déterminer une limite grâce à un équivalent – Déterminer les éventuelles limites des suites suivantes.

1. $u_n = \frac{n\sqrt{n} + n}{n + 1}$

2. $u_n = \sqrt{n}(e^{1/n} - 1)$

3. $u_n = n(\sqrt{1 + 1/n} - 1)$

Exercice 8. – Étudier la convergence d'une série grâce à un équivalent ou une négligeabilité – Étudier la convergence des séries dont le terme général est le suivant.

1. $u_n = \frac{n\sqrt{n} + n}{n + 1}$

3. $u_n = \sqrt{n}(e^{1/n} - 1)$

5. $u_n = \frac{n}{e^n}$

2. $u_n = \frac{n\sqrt{n} + n}{-n^3 + 1}$

4. $u_n = \frac{(\sqrt{1 + 1/n} - 1)}{n}$

6. $u_n = \frac{\ln(n)}{n^3}$

2 Équivalents et limites de suites

Exercice 9. – Classer les suites dont on donne les termes généraux ci-dessous par ordre de négligeabilité :

1. $\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}, \frac{\ln n}{n\sqrt{n}}, \frac{1}{n \ln n},$

2. $n^2, \sqrt{n}, \frac{e^n}{n}, \frac{n^2}{\ln n}, n \ln(n).$

Exercice 10. – Déterminer pour chaque couple de suites suivant (définies sur \mathbb{N}^*) laquelle est négligeable devant l'autre.

1. $u_n = \ln(n) + n^2, v_n = \ln(n^3)$

2. $u_n = e^{n/4}, v_n = n^2$

3. $u_n = e^{-n} + \ln(n), v_n = n$

Exercice 11. – Déterminer des équivalents (les plus simples possibles) des suites (u_n) définies par :

1. $u_n = n^3 + e^n + n\sqrt{n},$

2. $u_n = \frac{n}{\ln(n) + n^2},$

3. $u_n = \sqrt{e^{\frac{1}{n}} - 1},$

4. $u_n = \frac{1}{n} - \ln(1 + 1/n),$

Exercice 12. – –

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul, l'équation $e^x + x = n$ admet une unique solution, que l'on notera u_n .
2. Étudier le sens de variation de $(u_n)_{n \geq 1}$ et déterminer sa limite.
3. Montrer que pour tout $n \geq 1, u_n \leq \ln(n)$.
4. Montrer que pour n assez grand, $u_n \geq \ln(n) - 1$.
5. En déduire un équivalent simple de u_n .

3 Études de séries

Exercice 13. – Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\sum \frac{n^2 + 1}{2n^3 + 1},$

3. $\sum \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\sqrt{n}},$

4. $\sum e^{-n},$

6. $\sum \frac{\ln n}{n^2},$

2. $\sum \frac{\sqrt{n} + 1}{-n^2 + 1},$

5. $\sum \frac{n^3}{e^n},$

7. $\sum \sqrt{k^3 + 1} - \sqrt{k^3}.$

Exercice 14. – Déterminer la nature des séries suivantes suivant la valeur $a > 0$:

1. $\sum \frac{1+n}{n^a + 1},$

2. $\sum \frac{1}{n^a + n + 1},$

3. $\sum \frac{\ln n}{n^a}.$

Exercice 15. – Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$$

1. Montrer que la suite (u_n) est à termes strictement positifs et en déduire la convergence de la suite (u_n) ainsi que sa limite.

2. Montrer que la série de terme général $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ diverge à l'aide d'un télescopage.
3. En déduire la nature de la série de terme général u_n .

Exercice 16. – Série harmonique – Le but de l'exercice est de montrer que la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente. On déterminera un équivalent de la suite de ses sommes partielles. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \ln \left(1 - \frac{1}{n+1} \right).$$

2. Etudier la fonction $x \mapsto x + \ln(1-x)$. En déduire que (u_n) est décroissante.
3. Soit $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \ln \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)$$

- (b) En déduire, comme pour (u_n) , que (v_n) est croissante.
- (c) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
Que peut-on en déduire ?

4. Montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)_n$ est équivalente à $\ln n$.

5. Conclure quant à la convergence de la série harmonique ainsi que celle des séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ pour $\alpha < 1$.

Exercice 17. – Convergence de la série exponentielle –

1. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite à termes positifs. On suppose qu'il existe un réel $l \in]0, 1[$ tel qu'à partir d'un certain rang n_0 on ait $u_{n+1} \leq l u_n$.

- (a) Montrer qu'alors pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq l^{n-n_0} u_{n_0}$.
- (b) En déduire que la série de terme général u_n est convergente.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose, pour $n \geq 0$, $u_n = \frac{x^n}{n!}$.

- (a) Montrer qu'il existe n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \leq \frac{1}{2}$.
- (b) En déduire que la série de terme général u_n est convergente.

Exercice 18. – Le but de cet exercice est de montrer la convergence de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$, $n \geq 1$.

1. Montrer l'inégalité :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \leq \frac{1}{n+1}.$$

En déduire la limite de la suite $\left(\int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \right)_n$.

2. Montrer que pour $n \geq 0$ et $t \in [0, 1]$,

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k t^k = \frac{1}{1+t} + (-1)^n \frac{t^{n+1}}{1+t}$$

3. En déduire que

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} dt$$

4. Conclure.