Feuille d'exercices n° 3 : Couples de V. A. discrètes

1 Méthodes de base

Exercice 1. – Déterminer les lois marginales à partir de la loi du couple – Déterminer les lois marginales du couple (X, Y) donnée par le tableau suivant :

$Y \diagdown X$	0	1	2
1	1/10	2/10	1/10
2	4/10	1/10	1/10

Exercice 2. – Déterminer une des marginales à partir de la loi du couple – On lance indéfiniment une pièce donnant pile avec probabilité p $(0 < p < 1)$. On note, pour $k \geq 1$, A_k l'événement "obtenir Pile au k-ème lancer". On note X_1 la v.a.r représentant le rang du premier Pile et X_2 la v.a.r représentant le rang du second Pile.

1. Rappeler la loi de X_1, rappeler son espérance.
2. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2). On utilisera les événements A_k pour décrire les événements du type $[X_1 = i] \cap [X_2 = j]$.
3. En déduire la loi de X_2 puis l'espérance de X_2.

Exercice 3. – Déterminer une des marginales à partir d'une loi conditionnelle – On dispose d'une urne U_1 contenant une boule noire et une boule blanche et d'une urne U_2 contenant une boule noire et deux boules blanches. On effectue l'expérience aléatoire suivante : on lance une pièce équilibrée ; si le résultat est Pile, on effectue des tirages avec remise dans U_1 jusqu'à ce qu'on obtienne une boule noire ; si le résultat est Face, on effectue des tirages avec remise dans U_2 jusqu'à ce qu'on obtienne une boule noire. On note X la variable aléatoire valant 1 si on a obtenu Pile et 0 sinon ; et Y la variable aléatoire représentant le rang auquel on obtient la première boule noire.

1. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $[X = 1]$ puis sachant $[X = 0]$.
2. En déduire la loi de Y.
3. Déterminer l'espérance de Y.

Exercice 4. – Fonction d'un couple de v.a.r, formule de transfert – On reprend les données de l'exercice 1. On définit la v.a.r $Z = XY$

1. Déterminer la loi de Z puis son espérance.
2. Retrouver l'espérance de Z à l'aide de la formule de transfert.

Exercice 5. – Covariance, indépendance – On reprend les données de l'exercice 1.

1. Les v.a.r X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Déterminer la covariance du couple (X, Y). Retrouver le résultat de la question précédente.
3. Déterminer le coefficient de corrélation du couple (X, Y).

Exercice 6. – Formule de transfert – On reprend les données de l'exercice 3. Déterminer l'espérance de XY puis la covariance de X et Y.

Exercice 7. – Loi d'une somme – Soit X et Y deux v.a.r indépendantes suivant des lois uniformes sur $\{1, \ldots, n\}$. On pose $S = X + Y$.

1. Déterminer l'espérance de S.
2. Déterminer la loi de S.

Exercice 8. – **Loi d'un maximum** – Soit X et Y deux v.a.r indépendantes suivant des loi uniformes sur $\{1,\dots,n\}$. On pose $U = max(X,Y)$ et $V = min(X,Y)$.

1. Déterminer la loi de U puis son espérance.
2. En remarquant que $U + V = X + Y$, déduire de la question précédente l'espérance de V.
3. Déterminer la loi de V puis retrouver son espérance.

2 Couples de variables aléatoires

Exercice 9. – Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $1/4$ et Y une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.

1. On suppose que X et Y sont indépendantes. Déterminer la loi du couple (X,Y) (on présentera sous forme d'un tableau).
2. On suppose que $P(X = 0, Y = 0) = 3/10$. Déterminer la loi du couple (X,Y) (on présentera sous forme d'un tableau).

Exercice 10. – Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme avec $X(\Omega) = \{-1,0,1\}$. On note $Y = X^2$.

1. Déterminer la loi du couple (X,Y).
2. En déduire la loi de Y.
3. Calculer la covariance $\mathrm{Cov}(X,Y)$.
4. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 11. – On reprend les notation de l'exercice 2. Déterminer la loi de $X_2 - X_1$ puis montrer que $X_2 - X_1$ est indépendante de X_1.

Exercice 12. – – Un péage comporte m guichets numérotés de 1 à m. Soit N la variable aléatoire égale au nombre de voitures arrivant au péage en 1 heure. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose de plus que les conducteurs choisissent leur file au hasard et que ces choix sont indépendants. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de voitures se présentant au guichet 1.

1. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $[N = n]$.
2. Montrer que $P(X = k) = e^{-\lambda}\left(\dfrac{1}{m}\right)^k \dfrac{\lambda^k}{k!}\sum_{j=0}^{+\infty}\dfrac{1}{j!}\left(\lambda\left(1-\dfrac{1}{m}\right)\right)^j$.
   En déduire la loi de probabilité de X (on retrouvera une loi usuelle).
3. Donner sans calcul les valeurs de $E(X)$ et de $V(X)$.

Exercice 13. – Soient X, Y et Z trois variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p. On pose $S = X + Y$.

1. Déterminer l'espérance et la variance de S.
2. Déterminer la loi de S. Retrouver $E(S)$.
3. (a) Pour $k \geq 1$, calculer $P(Z \geq k)$.
   (b) Calculer $P(S \leq Z)$

Exercice 14. – Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul. On dispose d'une pièce dont la probabilité de faire "pile" est $p \in]0;1[$ et de $(n+1)$ urnes numérotées de 0 à n.
Pour $k \in [\![0;n]\!]$, l'urne numéro k contient k boules vertes et $(n-k)$ boules rouges.
On considère l'expérience $\mathcal{E}$ suivante : on lance n fois la pièce, puis on pioche une unique boule dans l'urne dont le numéro correspond au nombre de fois où " pile" a été obtenu.
Par exemple, si on a obtenu quatre " piles" au cours de ces n lancers, on pioche dans l'urne n^o4.
On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de "piles" obtenus lors des n lancers et Y la variable aléatoire qui vaut 1 si l'on tire une boule verte et 0 sinon.

1. (a) Reconnaître la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   On précisera en particulier $X(\Omega)$ et $P(X=k)$ pour tout k de $X(\Omega)$.
   Donner l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.
   (b) En utilisant la formule de Koenig-Huygens, calculer la valeur de $E(X^2)$.
2. (a) Calculer $P_{(X=0)}(Y=0)$ et $P_{(X=n)}(Y=0)$. X et Y sont-elles indépendantes?
   (b) Justifier que, pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $\quad P_{(X=k)}(Y=1) = \dfrac{k}{n}$.
   (c) En déduire, en utilisant le s. c. e. $(X=k)_{0\leq k\leq n}$, que : $P(Y=1) = \dfrac{E(X)}{n}$.
   (d) Donner la loi de Y et son espérance.
3. (a) Montrer que $E(XY) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} kP(X=k\cap Y=1) = \frac{E(X^2)}{n}$.
   (b) En déduire la covariance du couple (X,Y).

3 Suites de variables aléatoires

Exercice 15. – Soient X_1, X_2, ... X_n des variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que pour tout entier $i \geq 1$, la variable aléatoire X_i est de loi géométrique de paramètre $\frac{1}{i}$.
Calculer l'espérance et la variance de la variable $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Exercice 16. – On considère une urne contenant m boules ($m \geq 1$) numérotées de 1 à m. On effectue successivement n tirages ($n \geq 2$) dans l'urne, avec remise. On note X_i le numéro de la boule tirée au i-ème tirage et $S = \max(X_1, ..., X_n)$.

1. (a) Justifier que pour tout k on a $(S \leq k) = \bigcap_{i=1}^{n}(X_i \leq k)$.
   (b) En déduire la probabilité $P(S \leq k)$ pour tout $k \in \{1, ..., m\}$.
   (c) Justifier que $P(S=k) = P(S\leq k) - P(S \leq k-1)$. En déduire la loi de S.
2. En utilisant la même stratégie que dans la première question, déterminer la loi de la variable $I = \min(X_1, ..., X_n)$.

Exercice 17. –
On suppose que l'on dispose d'un stock illimité de boules rouges et de boules blanches indiscernables au touché.
Une urne contient initialement une boule rouge et une boule blanche.
On effectue une succession d'expériences aléatoires selon le protocole suivant : on extrait une boule de l'urne et, après chaque tirage, on remet cette boule dans l'urne avec une autre boule de la même couleur que la boule tirée. On note (Ω, P) l'espace probabilisé associé à cette expérience aléatoire (on ne cherchera pas à le préciser).
Pour tout entier $n \geq 1$, on note X_n (respectivement Y_n) le nombre de boules rouges (respectivement blanches) contenues dans l'urne après la n-ème répétition de cette expérience. n-ème tirage.
Pour tout entier $k \geq 1$, on note R_k (respectivement B_k) l'événement "tirer une boule rouge (respectivement blanche) au k-ème tirage".

1. (a) Déterminer $X_1(\Omega)$, la loi de X_1. Calculer $E(X_1)$ et $V(X_1)$.
   (b) Exprimer les événements $[X_2 = 1]$, $[X_2 = 2]$ et $[X_2 = 3]$ en fonction des événements B_1, B_2, R_1, R_2.
   (c) Montrer que X_2 suit la loi uniforme sur $[\![1, 3]\!]$ (c'est à dire $\{1, 2, 3\}$). En déduire $E(X_2)$ et $V(X_2)$.

2. (a) Exprimer l'événement $[X_1 = 1] \cap [X_2 = 2]$ en fonction (de certains) des événements B_1, B_2, R_1, R_2.
   En déduire $P\,(X_1 = 1\ ;\ X_2 = 2)$.
   (b) Déterminer sous forme d'un tableau la loi conjointe du couple (X_1, X_2).
   (c) Calculer la covariance de X_1 et X_2. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

3. (a) Pour tout entier $n \geq 1$, exprimer l'événement $[X_n = 1]$ en fonction des événements B_1, B_2,..., B_n.
   (b) Montrer que $P(X_n = 1) = \dfrac{1}{n+1}$. Déterminer de même $P(X_n = n + 1)$.

4. (a) Établir, pour tout entier $k \in [\![2, n + 1]\!]$, les égalités suivantes :
$$P_{[X_n=k-1]}(X_{n+1} = k) = \frac{k-1}{n+2} \quad \text{et} \quad P_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k) = \frac{n-k}{n+2}\ .$$
   (b) En déduire, , pour tout entier $k \in [\![2, n+1]\!]$, une relation entre $P(X_n = k-1)$, $P(X_n = k)$ et $P(X_{n+1} = k)$.
   (c) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout $n \geq 1$, la variable aléatoire X_n suit la loi uniforme discrète sur $[\![1, n + 1]\!]$.

5. Compléter le programme python suivant afin qu'il simule une réalisation de la variable aléatoire X_n, où l'entier n est entré au clavier.

```python
import numpy.random as rd
n = int(input('entrer une valeur de n'))
r = 1
b = 1
for k in range(1,n+1):
    if rd.random() < r/(r+b) :
        ...
    else :
        ...

print(r)
```

6. (a) Justifier que les variables aléatoires X_n et Y_n ont même loi.
   (b) Pour tout entier $n \geq 1$, que vaut $X_n + Y_n$?
   (c) Quel est le coefficient de corrélation linéaire $\rho(X_n, Y_n)$?