DM n°1

À rendre le 10/10/2025

Exercice 1

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par : $u_1 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2(n+1)u_n + 1}$$

1. (a) Montrer que l'on définit ainsi une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, de nombres réels strictement positifs. *On pourra procéder par récurrence sur n en montrant que, pour tout entier naturel n. le réel u_n est bien défini et strictement positif.*

   (b) Compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle renvoie la valeur de u_n à l'appel de suite(n).

```python
def suite(n):
    u = 1/2
    for k in range(1,n):
        u = ...      # u prend comme valeur u_{k+1}
    return u
```

2. Donner la valeur de u_2, puis vérifier que $u_3 = \frac{1}{12}$.
   À l'aide de la fonction de la question précédente, donner une valeur approchée de u_{10}.

3. (a) Utiliser la définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour établir l'encadrement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < u_{n+1} < \frac{1}{2(n+1)}$$

   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et donner sa limite.

4. Pour tout entier naturel k non nul, on pose : $v_k = \frac{1}{u_k}$.

   (a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, établir l'égalité : $v_{k+1} - v_k = 2(k+1)$.

   (b) La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle arithmétique ? Justifier.

   (c) Par sommation de l'égalité obtenue à la question 4a), établir la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = n(n+1)$$

   (d) En déduire explicitement u_n en fonction de n puis retrouver la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

5. Avant d'étudier la convergence de la série de terme général u_n par le calcul, on l'étudie de manière graphique.

   (a) Compléter le programme suivant afin qu'il calcule et trace le graphique représentant les 20 premiers termes de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des sommes partielles associée à cette série.

```
import matplotlib.pyplot as plt

n = 20
u = 1/2
# On initialise la liste destin\'ee \`a contenir les S_k, 1<=k<=n
liste_S = [0 for k in range(1,n+1)]
liste_S[0] = ...
# Rem : liste_S[k] devra contenir la valeur de S_{k+1}
for k in range(1,n):
    u = ...
    liste_S[k] = ...
# Puis on trace :
liste_k = [k for k in range(1,n+1)]
plt.plot(... , ... , '.')
```

(b) Quelle semble être la nature de la série de terme général u_n ?

6. (a) Déterminer les constantes a et b pour lesquelles, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$u_n = \frac{a}{n} - \frac{b}{n+1}$$

(b) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, calculer la somme $\sum_{k=1}^{n} u_k$.

(c) En déduire que la série de terme général u_n converge et donner sa somme.

7. (a) Expliquer pourquoi on peut maintenant considérer une variable aléatoire X dont la loi est donnée par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = u_n$$

(b) Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Montrer que :

$$\int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t \leq \frac{1}{n+1}$$

(c) En déduire l'inégalité

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} \geq \ln(N+2) - \ln(2)$$

(d) Montrer alors que X ne possède pas d'espérance.

Exercice 2 (facultatif)

Partie I : Étude de deux suites

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln(x) - \ln(x+1)$.
   (a) Déterminer $\lim_{x\to 0} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
   (b) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^{+*}$ et dresser son tableau de variations.
   (c) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} - u_n = f(n)$.
   (d) En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (e) Écrire une fonction d'en-tête `def u(n):` qui prend en argument un entier naturel n non nul et qui renvoie la valeur de u_n.
   On suppose la fonction `log` (pour ln) importée du module numpy.

2. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.
   (b) Montrer que pour tout réel x positif : $\ln(1+x) \leq x$.
   En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
   (c) Donner le développement limité d'ordre 2 de $\ln(1+x)$ en 0. En déduire que :

$$v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$$

   (d) Déterminer la nature de la série de terme général $v_{n+1} - v_n$. On note $\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n)$.
   (e) Pour $n \geq 2$, simplifier la somme partielle : $\sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)$.
   En déduire que la suite $(v_n)_{n\geq 2}$ converge vers γ.

3. (a) Déterminer $\lim_{n\to\infty} u_n$.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n \leq \gamma \leq u_n$ puis que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |u_n - \gamma| \leq \frac{1}{n}$
   (c) La fonction `floor` a été importée du module numpy. On rappelle que l'instruction `floor(x)` renvoie la partie entière d'un réel x. On suppose également que la fonction `u` de la question 1) e: a été correctement programmée. Expliquer l'intérêt et le fonctionnement du script ci-dessous :

```
eps = 10**(-4)
n = floor(1/eps) + 1
print(u(n))
```

Partie II: Étude d'une série

Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = \frac{1}{n(2n-1)}$.

1. Démontrer que la série de terme général a_n converge.

2. (a) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}$.

   (b) Déterminer deux réels α et β tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{\beta}{2n-1}$.

   (c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

3. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = u_{2n} - u_n + \ln(2)$

   où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite définie dans la partie I.

   (b) Calculer alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$.

4. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$.

   (b) Retrouver alors le résultat de la question 3) b: