Corrigé du DM n°1

À rendre le 10/10/2025

Exercice 1

1. (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathcal{P}_n$ la propriété : le réel u_n est bien défini et strictement positif.
   - $\mathcal{P}_1$ est bien vérifiée.
   - Supposons $\mathcal{P}_n$ vérifiée pour un certain entier non nul n.
     Alors $2(n+1)u_n + 1 > 0$ (car, par hypothèse de récurrence, $u_n > 0$) et donc la fraction $\dfrac{u_n}{2(n+1)u_n+1}$ est bien définie.
     De plus, $u_n > 0$ (par hypothèse de récurrence), donc $\dfrac{u_n}{2(n+1)u_n+1} > 0$.
     On en déduit que $\mathcal{P}_{n+1}$ est bien vérifiée.
   - Conclusion : en application du principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   (b)
```python
def suite(n):
    u = 1/2
    for k in range(1,n):
        u = u/(2*(k+1)*u+1)      # u prend comme valeur u_{k+1}
    return u
```

2. $u_2 = \dfrac{u_1}{2(1+1)u_1+1} = \dfrac{1/2}{2+1} = \dfrac{1}{6}$.
   $u_3 = \dfrac{u_2}{2(2+1)u_2+1} = \dfrac{1/6}{1+1} = \dfrac{1}{12}$.
   À l'aide de la fonction de la question précédente, on obtient $u_{10} \simeq 0,00909$.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $2(n+1)u_n + 1 > 2(n+1)u_n$; donc $u_{n+1} < \dfrac{u_n}{2(n+1)u_n} = \dfrac{1}{2(n+1)}$.
   L'autre inégalité découle de 1.(a).

   (b) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2(n+1)} = 0$, on déduit de la question précédente et du théorème d'encadrement que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

4. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$; on a :

$$\begin{aligned} v_{k+1} - v_k &= \frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k} \\ &= \frac{2(k+1)u_k+1}{u_k} - \frac{1}{u_k} \\ &= \frac{2(k+1)u_k+1-1}{u_k} \\ &= 2(k+1) \end{aligned}$$

   (b) La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas arithmétique. En effet, $v_{n+1} - v_n$ n'est pas constant.

(c) En utilisant l'égalité obtenue à la question 4a), on a, pour $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) &= \sum_{k=1}^{n-1} 2(k+1) \\
&= 2 \sum_{l=2}^{n} l \\
&= 2\left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right) \\
&= n(n+1) - 2
\end{aligned}$$

Par ailleurs, par télescopage,

$$\sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = v_n - v_1 = v_n - 2 \ .$$

On en déduit que $v_n = n(n+1)$ (formule également valable pour $n = 1$).

(d) On en déduit, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{1}{v_n} = \frac{1}{n(n+1)}$$

On retrouve bien $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

5. (a)

```
import matplotlib.pyplot as plt

n = 20
u = 1/2
#On initialise la liste destin\'ee \'a contenir les S_k, 1<=k<=n :
liste_S = [0 for k in range(1,n+1)]
liste_S[0] = u
#Rem : liste_S[k] devra contenir la valeur de S_{k+1}
for k in range(1,n):
    u = u/(2*(k+1)*u+1)
    liste_S[k] = liste_S[k-1] + u
#Puis on trace :
liste_k = [k for k in range(1,n+1)]
plt.plot(liste_k , liste_S , '.')
```

(b) Graphiquement, la suite des sommes partielles semble converger. Ceci impliquerait que la série de terme général u_n converge.

6. (a) On a $\dfrac{a}{n} - \dfrac{b}{n+1} = \dfrac{a(n+1) - bn}{n(n+1)} = \dfrac{(a-b)n + a}{n(n+1)}$.

Donc on a $u_n = \dfrac{a}{n} - \dfrac{b}{n+1}$ quel que soit n ssi $a = 1$ et $a - b = 0$, c'est à dire $a = 1$ et $b = 1$.

(b) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. En utilisant le résultat de la question précédente on a :
$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \ ;$$
et par télescopage
$$\sum_{k=1}^{n} u_k = 1 - \frac{1}{n+1} \ .$$

(c) On déduit de la question précédente que la suite des sommes partielles associée à la série de terme général u_n converge vers 1.
Ainsi la série de terme général u_n converge et
$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1 \ .$$

7. (a) On peut considérer une telle variable aléatoire car
   - tous les u_n sont positifs ;
   - $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$.

(b) Soit n un entier supérieur ou égal à 1.
Pour tout $t \in [n+1, n+2]$, on a $\dfrac{1}{t} \leq \dfrac{1}{n+1}$.
Ainsi, par croissancede l'intégrale,
$$\int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{t} \ \mathrm{d}t \leq \int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{n+1} \ \mathrm{d}t \ ;$$
c'est à dire :
$$\int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{t} \ \mathrm{d}t \leq \frac{1}{n+1} \ .$$

(c) on déduit de la question précédente que,pour $N \geq 1$,
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} \geq \sum_{n=1}^{N} \int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{t} \ \mathrm{d}t \ .$$
Or
$$\sum_{n=1}^{N} \int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{t} \ \mathrm{d}t = \int_{2}^{N+2} \frac{1}{t} \ \mathrm{d}t = [\ln(t)]_2^{N+2} = \ln(N+2) - \ln(2) \ .$$
D'où
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} \geq \ln(N+2) - \ln(2)$$

(d) La variable aléatoire X possède une espérance ssi la série de terme général $nP(X=n)$ converge absolument.

Or $nP(X = n) = nu_n = \dfrac{1}{n+1}$.
D'après la question précédente, comme $\lim\limits_{N\to+\infty} \ln(N+2) - \ln(2) = +\infty$, on a

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} = +\infty \; .$$

Ainsi la série de terme général $\dfrac{1}{n+1}$ diverge.
On en conclut que la variable aléatoire X ne possède pas d'espérance.

Remarque : on aurait pu obtenir certains résultats par comparaison avec des séries de Riemann :

- la convergence de la série de terme général u_n, car $u_n \sim \dfrac{1}{n^2}$;
- la divergence de la série de terme général $nP(X = n)$, car $nP(X = n) \sim \dfrac{1}{n}$.

Par contre, la valeur de la somme de la série de terme général u_n ne pouvait être obtenue ainsi.

Exercice 2 (facultatif)

D'après ECRICOME E 2018

Partie I : Étude de deux suites

1. (a) On a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x+1} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} \ln(1+x) = \ln(1) = 0$; donc, par somme,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty.$$

En $+\infty$, on a une forme indéterminée; mais on met tout sous un même logarithme et on sait que $x/(x+1)$ tend vers 1 donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0.$$

(b) Sur $\mathbb{R}_+^*$, f est dérivable comme combinaison de fonctions usuelles dérivables. On a d'ailleurs

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{-x + (x+1)^2 - x(x+1)}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)^2} > 0.$$

On en déduit le tableau de variations de f

x	0		$+\infty$
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	0

(c) Par définition de la suite (u_n)

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= f(n). \end{aligned}$$

(d) D'après le tableau de variations de f, on voit que $f(x) < 0$ pour tout $x > 0$. En particulier, $f(n) < 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, donc $u_{n+1} - u_n = f(n) < 0$ et la suite (u_n) est (strictement) décroissante.

(e)

```
def u(n);
    S = 0
    for k in range(1,n+1):
        S = S + 1/k
    return S - log(n)
```

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - \frac{1}{n+1} - u_n + \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \ln(n) - \ln(n+1) \\ &= \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

et c'est ce qu'on voulait.

(b) On peut étudier la fonction différence ou utiliser un argument de convexité. En effet, la fonction $x \mapsto \ln(x+1)$ est concave sur $]-1;+\infty[$ (elle est de classe $\mathcal{C}^2$ et sa dérivée seconde est strictement négative). Sa courbe représentative se trouve donc au dessous de toutes ses tangentes, y compris celle en $x = 0$ qui a pour équation $y = x + 1$, et qui donne bien l'inégalité attendue.

En appliquant cette inégalité à $x = 1/n$, on voit que $v_{n+1} - v_n \geq 0$ ou encore que (v_n) est croissante.

(c) La formule de Taylor-Young, ou une connaissance du cours permet d'écrire de développement limité à l'ordre 2 en 0 de cette fonction usuelle

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Comme $1/n \to 0$, si $n \to +\infty$, on peut utiliser ce DL dans l'expression de $v_{n+1} - v_n$:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ou encore
$$v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.$$

(d) La série de terme général $1/2n^2$ est convergente comme multiple d'une série de Riemann convergente. Par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, la série de terme générale $v_{n+1} - v_n$ est donc de même nature c'est à dire convergente. On note alors γ la valeur de sa somme
$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n).$$

(e) Le calcul de la somme partielle de la série susnommée fait apparaitre une somme télescopique;
$$\sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = v_n - v_1 = v_n - (u_1 - 1) = v_n$$
Or, comme la série de terme général v_n converge, la suite de ses sommes partielles converge. Ainsi, d'après le calcul qui précède, (v_n) est convergente et
$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} (v_{k+1} - v_k) = \gamma.$$

3. (a) Cette question n'étant pas vraiment formulée; on interprète l'énoncé comme une demande de justification de la convergence de (u_n) et le calcul de sa limite. On voit que
$$v_n = u_n - \frac{1}{n} \Longleftrightarrow u_n = v_n + \frac{1}{n}.$$
Comme (v_n) converge et que $1/n \to 0$, on en déduit que (u_n) converge et a la même limite que (v_n), c'est à dire γ.

(b) (v_n) étant croissante et convergente vers γ, (u_n) étant décroissante et convergente vers γ, on a bien l'encadrement demandé
$$v_n \leq \gamma \leq u_n.$$
Ceci permet de voir que
$$0 \leq u_n - \gamma = v_n - \gamma + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n},$$
ce qui donne bien
$$|u_n - \gamma| \leq \frac{1}{n}.$$

(c) Le programme proposé permet de calculer une approximation de γ à la précision `eps` près (rentrée par l'utilisateur). En effet, une telle approximation sera réalisée par un terme u_n tel que $|u_n - \gamma| <$ `eps`, ce qui, d'après la question précédente a lieu dès que $1/n <$ `eps`. Il suffit de prendre le premier entier n tel que $n > 1/$`eps`, donné par $\lfloor \texttt{1/eps} \rfloor + 1$.

Partie II: Étude d'une série

1. Le terme général de la série est équivalent à celui d'une série convergente. En effet,

$$a_n = \frac{1}{n(2n-1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2},$$

et la convergence de ce terme a été justifiée ci-avant.

2. (a) Observons que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \iff \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}$$

et on reconnait une décomposition des indices de sommation selon leur parité.

(b) Il suffit de mettre au même dénominateur et de procéder par identification

$$\begin{aligned}\frac{1}{n(2n-1)} = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{2n-1} \quad &\iff \quad \frac{1}{n(2n-1)} = \frac{\alpha(2n-1)+\beta n}{n(2n-1)} \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2\alpha+\beta & = & 0 \\ -\alpha & = & 1 \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} \alpha & = & -1 \\ \beta & = & 2 \end{array}\right.\end{aligned}$$

(c) On utilise les résultats des deux dernières questions

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k &= -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} && \text{(d'après 2b.)} \\ &= -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + 2\left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) && \text{(d'après 2a.)} \\ &= 2\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &= 2\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.\end{aligned}$$

3. (a) On revient à la définition de u_n

$$\begin{aligned}u_{2n} - u_n + \ln(2) &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \ln(2n) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n) \\ &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \ln(2) - \ln(n) + \ln(n) \\ &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \ln(2),\end{aligned}$$

ce qu'on attendait.

(b) D'après 2c. et 3a., on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty} a_k &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \\ &= \lim_{n\to+\infty} 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \\ &= 2\times \lim_{n\to+\infty} (u_{2n} - u_n + \ln(2)) \\ &= 2\ln(2),\end{aligned}$$

car, comme (u_n) converge, u_{2n} et u_n ont même limite et leur différence tend vers 0.

4. (a) On voit que

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n\left(1+\frac{k}{n}\right)} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}.\end{aligned}$$

(b) On reconnaît une suite de sommes de Riemann : si g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x.$$

En prenant $g(x) = \ln(x+1)$, on voit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \ln(2),$$

et on retrouve bien la valeur précédente

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = 2\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = 2\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = 2\ln(2).$$