Corrigé du DM n°1

À rendre le 08/10/2024

Exercice 1

1. $u_1 = \frac{1}{2}(u_0 + v_0) = \frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2} =$; $v_1 = \frac{1}{2}(u_1 + v_0) = \frac{1}{2}(d\frac{1}{2} + 1) = \frac{3}{4}$;
   $u_2 = \frac{1}{2}(u_1 + v_1) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}) = \frac{5}{8}$; $v_2 = \frac{1}{2}(u_2 + v_1) = \frac{1}{2}(\frac{5}{8} + \frac{3}{4}) = \frac{11}{16}$.

2.
```
n = int(input('entrez la valeur de n :'))
u=0
v=1
for k in range(1,n+1):
    u = 0.5*(u+v)
    v = 0.5*(u+v)
print(u)
print(v)
```

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, ; on a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n + v_n) - u_n = -\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}v_n = \frac{1}{2}(v_n - u_n) = \frac{1}{2}w_n.$$

   (b) On a, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + v_n) - \frac{1}{2}(u_n + v_n) = \frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{4}w_n.$$

   Donc la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

   (c) i. Des questions précédentes, on déduit que pour $n \in \mathbb{N}$, $w_n = w_0\left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=0}^{n-1} w_k = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right).$$

   ii. Le résultat de la question 3.a) implique :

$$\sum_{k=0}^{n-1} w_k = 2\sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - u_k \ .$$

   Il s'agit d'une somme télescopique ; on obtient donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} w_k = 2(u_n - u_0) = 2u_n \ ;$$

   et donc d'après la question précédente :

$$u_n = \frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right).$$

   iii. Pour $n = 0$,

$$\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = \frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^0\right) = 0 \ .$$

   On a bien également $u_0 = 0$. Donc l'expression précédente reste valide pour $n = 0$.

(d) On a
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0\ ;$$
Donc
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{3}\ .$$

(e) On a, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n + w_n$, donc
$$v_n = \frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)+\left(\frac{1}{4}\right)^n .$$
Donc
$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{2}{3}\ .$$

4. (a) • Si $\alpha = \frac{2}{3}$,
$$t_n = \frac{9}{8}\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)\right) = \frac{9}{8}\left(\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n\ .$$
Il s'agit du terme général d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$; donc la série de terme général t_n est convergente.

• Si $\alpha \neq \frac{2}{3}$,
$$t_n = \frac{9}{8}\left(\alpha-\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)\right) = \frac{9}{8}\left(\alpha-\frac{2}{3}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n\ .$$
Donc
$$\lim_{n\to+\infty} t_n = \frac{9}{8}\left(\alpha-\frac{2}{3}\right) \neq 0\ .$$
Donc la série de terme général t_n est divergente (grossièrement).

Conclusion : l'unique réel α pour lequel la série de terme général $t_n = \frac{9}{8}(\alpha - u_n)$, est convergente est $\alpha = \frac{2}{3}$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n$, donc $t_n > 0$. De plus on a
$$\sum_{n=0}^{+\infty} t_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{3}{4}\,\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = 1\ .$$

5. Soit X une variable aléatoire dicrète à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}, P([X=n]) = t_n$.

(a) La variable aléatoire Y prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$$P([Y=n]) = P([X+1=n]) = P([X=n-1]) = t_{n-1}\ .$$
on en déduit que
$$P([Y=n]) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = p(1-p)^{n-1}\ ,$$
en posant $p = \frac{3}{4}$. On en déduit que Y suit la loi géométrique de paramètre $p = \frac{3}{4}$.

(b) On en déduit l'espérance de Y : $E(Y) = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$. Et comme $X = Y-1$, $E(X) = E(Y) - 1 = \frac{1}{3}$.

On en déduit la variance de Y : $V(Y) = \dfrac{1-\frac{3}{4}}{(\frac{3}{4})^2} = \frac{1}{4}\times\frac{4^2}{3^2} = \frac{4}{9}$. Puis $V(X) = V(Y) = \frac{4}{9}$.

Exercice 2 (facultatif)

Partie 1

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
   Sur l'intervalle $[k, k+1]$, $\frac{1}{t} \geq \frac{1}{k+1}$ car la fonction inverse est décroissante.
   On a donc :
$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dt = \frac{1}{k+1} \ .$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   on a
$$v_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \ .$$
   D'après la question précédente, on a donc :
$$v_n \leq 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} = 1 + \int_1^n \frac{dt}{t} \ ;$$
   la dernière égalité étant due à la relation de Chasles. On obtient ainsi :
$$v_n \leq 1 + [\ln(t)]_1^n = 1 + \ln(n) \ .$$

Partie 2

1. (a) Notons, pour $n \geq 0$, $\mathcal{P}_n$ la propriété $u_n > 0$.
   - $\mathcal{P}_0$ est vraie car $u_0 = 1$.
   - Soit $n \geq 0$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie.
     On a alors $\frac{1}{u_n} > 0$ et $u_n > 0$ donc $\frac{1}{u_n} + u_n > 0$; c'est à dire $u_{n+1} > 0$.
     donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
   - En application du principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geq 0$.

   (b) Soit $n \geq 0$.
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0 \ .$$
   Donc la suite (u_n) est croissante.

2. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$.
$$u_{k+1}^2 - u_k^2 = \left(u_k + \frac{1}{u_k}\right)^2 - (u_k)^2 = (u_k)^2 + 2 = \left(\frac{1}{u_k}\right)^2 - (u_k)^2 = 2 + \frac{1}{(u_k)^2} \ .$$
   (b) Soit $n \geq 1$.
   On a d'une part (somme télescopique)
$$\sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1}^2 - u_k^2 = u_n^2 - u_0^2 = u_n^2 - 1 \ .$$
   D'autre part, d'après la question a),
$$\sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1}^2 - u_k^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \left(2 + \frac{1}{(u_k)^2}\right) = 2n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(u_k)^2} \ .$$
   On en déduit que
$$u_n^2 - 1 = 2n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(u_k)^2} \ ;$$
   et donc
$$u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(u_k)^2} \ .$$
   Remarque : on aurait pu montrer cette relation par récurrence.

(c) Comme, pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(u_k)^2} \geq 0 \ ,$$

on déduit de la question précédente que : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n^2 \geqslant 2n+1$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n+1 = +\infty$, on en déduit par le théorème de comparaison que la limite de la suite (u_n) est $+\infty$.

3. (a) Soit $n \geq 2$.
D'après 2.b),

$$u_n^2 = 2n+1+\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(u_k)^2} \ .$$

Mais d'après 2.c), pour tout $k \geq 1$, $u_k^2 \geqslant 2k+1$, donc $\dfrac{1}{u_k^2} \leq \dfrac{1}{2k+1}$.
On en déduit que

$$u_n^2 \leq 2n+1+\frac{1}{(u_0)^2}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2k+1} \leq 2n+2+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2k} = 2n+2+\frac{1}{2}v_{n-1} \ .$$

(b) En utilisant de plus le résultat de 1.b), on obtient, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$u_n^2 \leq 2n+2+\frac{1}{2}(\ln(n-1)+1) \leqslant 2n+\frac{5}{2}+\frac{\ln(n-1)}{2}$$

(c) En utilisant les résultats des questions 2.c) et 3.b), on a :

$$2n+1 \leq u_n^2 \leq 2n+\frac{5}{2}+\frac{\ln(n-1)}{2} \ ;$$

et donc

$$\sqrt{2n+1} \leq u_n \leq \sqrt{2n+\frac{5}{2}+\frac{\ln(n-1)}{2}} \ ;$$

$$\sqrt{2n(1+1/2n)} \leq u_n \leq \sqrt{2n\left(1+\frac{5}{4n}+\frac{\ln(n-1)}{4n}\right)} \ ;$$

et enfin

$$\sqrt{1+1/2n} \leq \frac{u_n}{\sqrt{2n}} \leq \sqrt{1+\frac{5}{4n}+\frac{\ln(n-1)}{4n}} \ .$$

On a de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{1+1/2n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{1+\dfrac{5}{4n}+\dfrac{\ln(n-1)}{4n}} = 1$ (en utilisant les croissances comparées de $\ln(n)$ et $4n$.)
Ainsi, en conséquence du théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{\sqrt{2n}} = 1$.
On en déduit finalement que $u_n \sim \sqrt{2n}$ quand $n \to +\infty$.

Partie 3

1.
```
n=int(input('entrer la valeur de n'))
u=1
for i in range(1,n+1):
    u=u+1/u

print(u)
```

2. (a)
```
u=1
n=0
while u<100 :
    u=u+1/u
    n=n+1

print(n)
```

(b) On donne $\ln(2) < 0,70$ et $\ln(5) < 1,61$.

$$\ln(5000) = \ln(5 \times 10^3) = \ln(5^4 \times 2^3) = 4\ln(5) + 3\ln(2) \ .$$

On déduit des valeurs données que

$$\ln(5000) \leq 4 \times 0,70 + 3 \times 1,61 = 7,63 \ .$$

(c) Si $n \geq 5000$, d'après 2.c), $u_n^2 \geq 10000 + 1$, donc $u_n > 100$.
On en déduit que l'entier n trouvé en 2a) est inférieur à 5000.
Si $n \leq 4994$, d'après 3.b), $u_n^2 \leq 9988+2,5+\ln(4994) \leq 9988+2,5+\ln(5000) \leq 9988+2,5+7,63 < 10000$; et donc $u_n < 100$.
On en déduit que l'entier n trouvé en 2a) est supérieur à 4995.