

Corrigé du DS n°3

le 15/10/2025

Durée : 2h

- L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
- La clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une grande part dans la notation.
- Le résultat d'une question peut être admis afin de traiter une question suivante.
- On encadrera le résultat de chaque question.

Exercice 1

D'après EDHEC 2013

1. (a) On montre l'encadrement par récurrence.

Pour $n = 0$, c'est bien vérifié car $u_0 = 0$. Supposons maintenant l'encadrement vrai à un rang n quelconque fixé. Montrons qu'il est alors vrai au rang $n + 1$:

Comme $0 \leq u_n \leq 1$, on a $0 \leq u_n^2 \leq 1$ (par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$).

Donc $1 \leq u_n^2 + 1 \leq 2$. Et donc, en divisant par 2 : $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$. Par conséquent, on a bien $0 \leq u_{n+1} \leq 1$, ce qui termine la récurrence.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq u_n \leq 1$.

- (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 + 1}{2} - u_n = \frac{u_n^2 + 1 - 2u_n}{2} = \frac{(u_n - 1)^2}{2}$$

Par conséquent, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On en déduit que la suite (u_n) est croissante.

- (c) La suite (u_n) est croissante (question précédente) et majorée par 1 (question 1.(a)). D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que la suite (u_n) converge.

Appelons ℓ sa limite. Alors, en passant à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}$, on obtient $\ell = \frac{\ell^2 + 1}{2}$. Donc (en multipliant par 2) : $2\ell = \ell^2 + 1$, c'est-à-dire $\ell^2 + 1 - 2\ell = 0$, ou encore : $(\ell - 1)^2 = 0$.

On en déduit que $\ell - 1 = 0$, i.e $\ell = 1$.

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

2. (a) On calcule les termes successifs à l'aide d'une boucle `for` :

```
def suite_u(n):
    res=0
    for i in range(1,n+1):
        res=(1+res**2)/2
    return res
```

- (b) On fait une boucle **while** : tant que les 2 conditions ne sont pas réunies, on continue à calculer des termes :

```
u=0
n=0
while 1-u > 10**(-3):
    u = (1+u**2)/2
    n = n+1

print(n)
```

3. (a) Ce graphique représente la suite des sommes partielles associée à la série de terme général v_n .
- (b) Le graphique semble indiquer que la suite des sommes partielles tend vers $+\infty$; ce qui indiquerait que la série de terme général v_n est divergente.
4. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
 v_k - v_{k+1} &= (1 - u_k) - (1 - u_{k+1}) \\
 &= u_{k+1} - u_k \\
 &= \frac{u_k^2 + 1}{2} - u_k \\
 &= \frac{u_k^2 + 1 - 2u_k}{2} \\
 &= \frac{(u_k - 1)^2}{2}
 \end{aligned}$$

C'est-à-dire : $\boxed{v_k - v_{k+1} = \frac{v_k^2}{2}}.$

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{n-1} (v_k - v_{k+1}) &= \sum_{k=0}^{n-1} v_k - \sum_{k=0}^{n-1} v_{k+1} \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} v_k - \sum_{k=1}^n v_k \quad (\text{changement d'indice : } j = k + 1) \\
 &= v_0 + \sum_{k=1}^{n-1} v_k - \sum_{k=1}^{n-1} v_k - v_n \quad (\text{on sort des termes des sommes})
 \end{aligned}$$

Les sommes se simplifient. Il reste alors $\sum_{k=0}^{n-1} (v_k - v_{k+1}) = v_0 - v_n$. Or, $v_0 = 1 - u_0 = 1$.

Donc finalement :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} (v_k - v_{k+1}) = 1 - v_n}$$

(c) Soit $N \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^N v_k^2 &= 2 \sum_{k=0}^N (v_k - v_{k+1}) \quad (\text{question 3.(a)}) \\ &= 2(1 - v_{N+1}) \quad (\text{question précédente})\end{aligned}$$

Or, $v_{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$ (car $u_n \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1$ d'après la question 1.(c)). Donc $\sum_{k=0}^N v_k^2 \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 2$.

Conclusion : La série de terme général v_n^2 converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n^2 = 2$.

Exercice 2 :

1. On désigne par A (resp B) l'événement "le serveur A (resp B) est choisi".

Le serveur A est choisi dans 70% des cas donc $P(A) = 0.7$. Le serveur B est choisi dans 30% des cas donc $P(B) = 0.3$

- (a) On désigne par E l'événement "il y a une erreur de transmission lors de l'envoi d'un courrier". On sait que $P_A(E) = 0.1$ et $P_B(E) = 0.05$. Par complémentarité des événements A et B :

$$P(E) = P(E \cap A) + P(E \cap B) = P_A(E) \times P(A) + P_B(E) \times P(B)$$

$$\text{donc } \boxed{P(E) = 0.1 \times 0.7 + 0.05 \times 0.3 = 0.085}$$

- (b) On veut calculer $P_E(A)$. Par la formule de Bayes, $P_E(A) = \frac{P_A(E) \times P(A)}{P(E)}$, donc

$$\boxed{P_E(A) = \frac{0.1 \times 0.7}{0.085} = \frac{70}{85} = \frac{14}{17}}$$

2. (a) On recommence la même épreuve de Bernoulli de paramètre $p = P(A) = 0.7$, de façon indépendante, jusqu'à obtenir un 1er succès et T_1 compte le nombre de réalisations nécessaires donc T_1 suit la loi géométrique de paramètre $p = 0.7$.

$$\text{On a donc } \forall k \geq 1, P(T_1 = k) = (0.3)^{k-1} \times 0.7, \text{ son espérance mathématique } \boxed{E(T_1) = \frac{1}{p} = \frac{10}{7}} \text{ et}$$

$$\text{sa variance } \boxed{V(T_1) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{30}{49}}$$

- (b) On a $T_2(\Omega) = \{n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$.

- (c) Remarquons que l'événement $\overline{A_i}$ correspond à : " le serveur B a été utilisé le i -ème jour ". Pour $k \geq 2$,

$$(T_1 = j) \cap (T_2 = k) = \overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{j-1}} \cap A_j \cap \overline{A_{j+1}} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k ;$$

et donc, en utilisant l'indépendance des A_i , $i \geq 1$,

$$P((T_1 = j) \cap (T_2 = k)) = P(\overline{A_1}) \times \cdots \times P(\overline{A_{j-1}}) \times P(A_j) \times P(\overline{A_{j+1}}) \times \cdots \times P(\overline{A_{k-1}}) \times P(A_k) = 0,7^2 \times 0,3^{k-2}$$

- (d) On remarque que pour $k \geq 2$,

$$(T_2 = k) \subset (T_1 \leq k-1) = \bigcup_{i=1}^{k-1} (T_1 = i) ;$$

cette dernière union étant disjointe. On a donc

$$(T_2 = k) = (T_2 = k) \cap (T_1 \leq k-1) = \bigcup_{i=1}^{k-1} (T_1 = i) \cap (T_2 = k) ;$$

cette union étant disjointe et donc, en utilisant le résultat de la question précédente,

$$P(T_2 = k) = \sum_{i=1}^{k-1} P((T_1 = i) \cap (T_2 = k)) = (k-1)0,7^2 \times 0,3^{k-2} .$$

Remarque : on pouvait, comme cela a été fait en cours, utiliser la formule des probabilités totales, qui est une méthode plus générale.

- (e) La série de terme général $k(k-1)0,7^2 0,3^{k-2}$ converge absolument car c'est une série dérivée (deux fois) de géométrique de raison strictement comprise entre -1 et 1 . On a donc

$$E(T_2) = \sum_{k=2}^{+\infty} kP(T_2 = k) = 0,7^2 \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)0,3^{k-2}$$

$$E(T_2) = 0,7^2 \frac{2}{(1-0,3)^3} = 0,7^2 \frac{2}{(0,7)^3} = \frac{2}{0,7}.$$

(f)

```
import numpy.random as rd
n = 0
i = 0 # i d'esigne le num'ero du jour
while n < 2:
    x = rd.random()
    if x < 0.7 :
        n = n + 1 # n compte le nombre de fois
                  # o'u le serveur A est choisi
    i=i+1

print(i, "valeur simul'ee de T2")
```

3. On recommence n fois la même épreuve de Bernoulli de paramètre $p=P(A)=0.7$, de façon indépendante et N_n compte le nombre de succès obtenus donc N_n suit la loi binomiale de taille n et paramètre $p=0.7$.

Ainsi $N_n(\Omega) = [0, n]$ et $\forall i \in N_n(\Omega)$, $P(N = i) = \binom{n}{i} (0.7)^i (0.3)^{n-i}$.

De plus son espérance mathématique $E(N_n) = np = 0.7n$ et sa variance $V(N_n) = np(1-p) = 0.21n$.

4. On note toujours A_i l'événement " le serveur A a été utilisé le i -ème jour " et B_i l'événement " le serveur B a été utilisé le i -ème jour ".
- (a) Fixons $k \in \mathbb{N}^*$; $(L_1 = k)$ signifie que pendant les k premiers jours, c'est le même serveur qui a été choisi et le jour suivant l'autre serveur. Donc

$$(L_1 = k) = (A_1 \cap \dots \cap A_k \cap B_{k+1}) \cup (B_1 \cap \dots \cap B_k \cap A_{k+1}) ;$$

cette union étant disjointe. On a ainsi

$$P(L_1 = k) = P(A_1 \cap \dots \cap A_k \cap B_{k+1}) + P(B_1 \cap \dots \cap B_k \cap A_{k+1}) ;$$

et en utilisant l'indépendance du choix des serveurs d'un jour à l'autre :

$$P(L_1 = k) = (0.3)^k (0.7) + (0.7)^k (0.3)$$

- (b) Les séries de termes généraux $(0.3)^k (0.7)$ et $(0.7)^k (0.3)$ convergent car ce sont des séries géométriques de raisons strictement comprises entre -1 et 1 ; et on a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(L_1 = k) = 0,7 \sum_{k=1}^{+\infty} 0,3^k + 0,3 \sum_{k=1}^{+\infty} 0,7^k = 0,7 \left(\frac{1}{1-0,3} - 1 \right) + 0,3 \left(\frac{1}{1-0,7} - 1 \right)$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(L_1 = k) = 1 - 0,7 + 1 - 0,3 = 1.$$

Calculons maintenant l'espérance de L_1 .

Les séries de termes généraux $k (0.3)^k (0.7)$ et $k (0.7)^k (0.3)$ convergent absolument car ce sont des séries dérivées de géométriques de raisons strictement comprises entre -1 et 1 ; et on a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k P(L_1 = k) = 0,7 \sum_{k=1}^{+\infty} k 0,3^k + 0,3 \sum_{k=1}^{+\infty} k 0,7^k = 0,7 \times 0,3 \sum_{k=1}^{+\infty} k 0,3^{k-1} + 0,3 \times 0,7 \sum_{k=1}^{+\infty} k 0,7^{k-1}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k P(L_1 = k) = 0,7 \times 0,3 \left(\frac{1}{(1 - 0,3)^2} \right) + 0,3 \times 0,7 \left(\frac{1}{(1 - 0,7)^2} \right)$$

$$E(L_1) = \sum_{k=1}^{+\infty} k P(L_1 = k) = \frac{0,3}{0,7} + \frac{0,7}{0,3} = \frac{3}{7} + \frac{7}{3} = \frac{58}{21} .$$

(c) Pour $k \geq 1$,

$$(L_1 = j) \cap (L_2 = k) = (A_1 \cap \dots \cap A_j \cap B_{j+1} \cap \dots \cap B_{j+k} \cap A_{j+k+1}) \dots \\ \dots \bigcup (B_1 \cap \dots \cap B_j \cap A_{j+1} \cap \dots \cap A_{j+k} \cap B_{j+k+1})$$

donc, en utilisant le fait que l'union est disjointe et l'indépendance des requêtes,

$$P((L_1 = j) \cap (L_2 = k)) = 0,7^{j+1} 0,3^k + 0,3^{j+1} 0,7^k .$$

(d) Par la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet $\{(L_1 = j), j \geq 1\}$,

$$P(L_2 = k) = \sum_{j=1}^{+\infty} P((L_1 = j) \cap (L_2 = k)) = \sum_{j=1}^{+\infty} \left((0.7)^{j+1} (0.3)^k + (0.3)^{j+1} (0.7)^k \right)$$

$$P(L_2 = k) = (0.3)^k (0.7) \sum_{j=1}^{+\infty} (0.7)^j + (0.7)^k (0.3) \sum_{j=1}^{+\infty} (0.3)^j$$

$$P(L_2 = k) = (0.3)^k (0.7) \left(\frac{1}{0,3} - 1 \right) + (0.7)^k (0.3) \left(\frac{1}{0,7} - 1 \right)$$

$$P(L_2 = k) = (0.3)^{k-1} (0.7)^2 + (0.7)^{k-1} (0.3)^2$$