

DS n°3

le 15/10/2025

Durée : 2h

-
- L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
 - La clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une grande part dans la notation.
 - Le résultat d'une question peut être admis afin de traiter une question suivante.
 - On encadrera le résultat de chaque question.
-

Exercice 1

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}$.

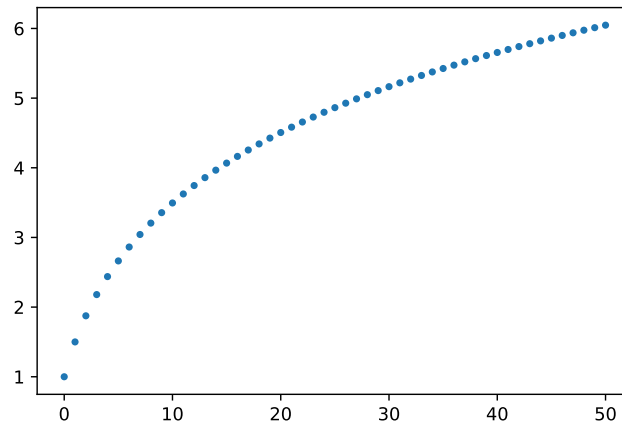
1. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a $0 \leq u_n \leq 1$.
(b) Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
(c) Dédurre des questions précédentes que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.
2. (a) Écrire une fonction Python `suite_u(n)` qui renvoie la valeur de u_n .
(b) Écrire un programme qui permet de déterminer et d'afficher la plus petite valeur de n pour laquelle on a : $1 - u_n < 10^{-3}$ (sans utiliser la fonction précédente).
3. Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = 1 - u_n$. On cherche à étudier la convergence de la série de terme général v_n . On utilise le programme suivant :

```
import matplotlib.pyplot as plt

n = 50
u = 0
v = 1-u
S = v
listeS = [S]
for i in range(1,n+1):
    u = (1+u**2)/2
    v = 1 - u
    S = S + v
    listeS.append(S)

plt.plot([i for i in range(n+1)] , listeS , '.')
```

- (a) Expliquer ce que représente le graphique obtenu grâce à ce programme.
- (b) Le graphique obtenu est le suivant :



Que peut-on en déduire sur le comportement de la série de terme général v_n ?

4. On cherche maintenant à étudier la convergence de la série de terme général v_n^2 .

(a) Pour tout entier naturel k , exprimer $v_k - v_{k+1}$ en fonction de v_k .

(b) Simplifier, pour tout entier naturel n non nul, la somme $\sum_{k=0}^{n-1} (v_k - v_{k+1})$.

(c) Donner pour finir la nature de la série de terme général v_n^2 ainsi que la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n^2$.

Exercice 2 :

Une personne envoie chaque jour un courrier électronique ; son ordinateur faisant un choix entre deux serveurs A ou B pour le transmettre. On constate que le serveur A est choisi dans 70% des cas (donc le serveur B dans 30% des cas) et que les choix des serveurs sont indépendants les uns des autres.

1. Dans cette question, on suppose que la probabilité d'une erreur de transmission avec le serveur A est de 0,1, alors que la probabilité d'erreur de transmission avec le serveur B est de 0,05.
 - (a) Calculer la probabilité pour qu'il y ait une erreur de transmission lors de l'envoi d'un courrier.
 - (b) Si le courrier a subi une erreur de transmission, quelle est la probabilité pour que le serveur utilisé soit le serveur A ?
2. À partir d'un jour donné, que l'on appellera le jour 1, on note T_1 la variable aléatoire correspondant au numéro du jour où pour la première fois le serveur A est choisi et T_2 le numéro du jour où pour la deuxième fois le serveur A est choisi. On admet l'existence de telles variables aléatoires définies sur un espace probabilisé Ω , que l'on ne cherchera pas à préciser, muni d'une probabilité P . Pour $k \geq 1$, on note A_k l'événement : " le serveur utilisé le jour k est A ".
 - (a) Déterminer la loi de T_1 et rappeler son espérance mathématique et sa variance.
 - (b) Déterminer $T_2(\Omega)$.
 - (c) Exprimer, pour $k \geq 2$ et $1 \leq j < k$, $(T_1 = j) \cap (T_2 = k)$ en fonction des A_i , $1 \leq i \leq k$. En déduire la probabilité de $(T_1 = j) \cap (T_2 = k)$.
 - (d) En déduire que pour $k \geq 2$,

$$P(T_2 = k) = (k-1) (0,7)^2 (0,3)^{k-2} .$$

- (e) Montrer que T_2 admet une espérance et la calculer.
- (f) Le programme suivant est destiné à simuler une valeur de la variable aléatoire T_2 . Le recopier et le compléter afin qu'il réalise bien cette tâche. On rappelle que `rd.random()` simule une variable aléatoire uniformément répartie entre 0 et 1.

```
import numpy.random as rd
n=0
i=0 # i d'esigne le num'ero du jour
while n < ...
    x = rd.random()
    if x < .... :
        n = .... # n compte le nombre de fois
                  # o'u le serveur A est choisi
    i=i+1

print(...., "valeur simul'ee de T2")
```

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on note N_n la variable aléatoire représentant le nombre de fois où l'ordinateur choisit le serveur A pendant les n premiers jours. Déterminer la loi de N_n ; préciser son espérance mathématique et sa variance.

4. On note les différents serveurs utilisés par l'ordinateur par une suite de lettres. Par exemple, la suite AABBBBA... signifie que les deux premiers jours l'ordinateur a choisi le serveur A, les jours 3. 4 et 5 il a choisi le le serveur B, et le jour 6 le serveur A. Dans cet exemple, on dit que l'on a une première série de longueur 2 et une deuxième série de longueur 3 (Ce qui est également le cas de la série BBAAAB ...).

On note L_1 la variable aléatoire représentant la longueur de la première série et L_2 celle de la deuxième série. Ainsi pour $k \geq 1$, dire que $L_1 = k$ signifie que pendant les k premiers jours, c'est le même serveur qui a été choisi et le jour suivant l'autre serveur.

- (a) Justifier soigneusement la formule : pour $k \geq 1$,

$$P(L_1 = k) = (0, 3)^k (0, 7) + (0, 7)^k (0, 3) .$$

- (b) Vérifier par le calcul que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(L_1 = k) = 1 ;$$

puis déterminer l'espérance mathématique de L_1 .

- (c) Pour tout $(j, k) \in (N \setminus \{0\})^2$, décrire l'événement $(L_1 = j) \cap (L_2 = k)$. En déduire sa probabilité.
- (d) À l'aide de la formule des probabilités totales, en déduire la loi de L_2 .