COMPLÉMENTS SUR LES SUITES ET LES SÉRIES

Rappels

0.1 Suites et sommes usuelles

On commence par rappeler les formules des sommes usuelles finies. Sont à revoir également :

- l'expression du terme général d'une suite arithmétique ou géométrique ;
- la méthode d'étude d'une suite arithmético-géométrique ;
- la méthode d'étude d'une suite définie par une relation du type : $u_{n+2} = a\ u_{n+1} + b\ u_n$.

Propriété 0.1 (Somme des termes d'une suite géométrique)**.** *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite géométrique de raison q ($q \neq 1$). Alors on a, pour m et n dans $\mathbb{N}$ ($m \leq n$) :*

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = u_m \times \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q} .$$

Remarque : u_m est le premier terme de la somme ; $n-m+1$ est le nombre de termes de la somme.

Cas particulier :
On a, pour $n \geq 1$ et $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} .$$

Propriété 0.2 (Somme des termes d'une suite arithmétique)**.** *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmétique. Alors on a, pour m et n dans $\mathbb{N}$ ($m \leq n$) :*

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = (n-m+1) \times \frac{u_m + u_n}{2} .$$

Remarque : u_m est le premier terme de la somme, u_n le dernier et $n-m+1$ est le nombre de termes de la somme.

Cas particulier : somme des n premiers entiers
On a, pour $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} .$$

Propriété 0.3 (Somme des carrés des n premiers entiers)**.** *On a, pour $n \geq 1$:*

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} .$$

0.2 Suites monotones, bornées

Ces propriétés sont importantes pour l'étude des suites pour lesquelles on ne dispose pas de formule pour le terme général.

Définition 0.4. *Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite :*

- **croissante** *lorsque : $\forall n \geq 0,\ u_{n+1} \geq u_n$;*
- **décroissante** *lorsque : $\forall n \geq 0,\ u_{n+1} \leq u_n$;*
- **monotone** *lorsqu'elle est croissante ou décroissante.*

En pratique : pour montrer qu'une suite est monotone (ou non), on étudie en général le signe de $u_{n+1} - u_n$.

Définition 0.5. *Une suite* $(u_n)_{n\geq 0}$ *est dite :*

- **majorée** *lorsque qu'il existe un réel* M *tel que :* $\forall n \geq 0,\ u_n \leq M$ *;*
- **minorée** *lorsque qu'il existe un réel* m *tel que :* $\forall n \geq 0,\ u_n \geq m$ *;*
- **bornée** *lorsqu'elle est majorée et minorée.*

Propriété 0.6. *Soit* $(u_n)_{n\geq 0}$ *une suite croissante. On a alors l'alternative suivante :*

- *Soit il existe un réel* M *tel que* $(u_n)_{n\geq 0}$ *est majorée par* M*. Alors* $(u_n)_{n\geq 0}$ *converge vers une limite* l*. On a de plus :*
$$l \leq M \qquad \text{et} \qquad \forall n \geq 0,\ u_n \leq l\ .$$
- *Soit la suite* $(u_n)_{n\geq 0}$ *n'est pas majorée. Elle admet alors pour limite* $+\infty$*.*

De même si une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ *est minorée par un réel* m *et décroissante, alors elle converge vers une limite* l*. On a de plus :*
$$l \geq m \qquad \text{et} \qquad \forall n \geq 0,\ u_n \geq l\ .$$

1 Suites définies par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit f une fonction définie d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$. Si pour tout $x \in I$ on a $f(x) \in I$, on dit alors que l'intervalle I est stable par f et on note $f(I) \subset I$.
Étant donné $a \in I$, on peut alors définir une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ telle que $u_0 = a$ et, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$. En particulier, on a alors : quel que soit $n \geq 0$, $u_n \in I$ (on demande en général de redémontrer ce point). On garde ces notations pour la suite du paragraphe et on suppose que l'on est dans la situation décrite ci-dessus.
Concernant les points abordés dans le paragraphe précédent :

- si l'intervalle I est borné, alors on peut conclure que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est bornée ;
- pour étudier ses variations, on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$, c'est à dire celui de $f(u_n) - u_n$; on est alors amené à étudier le signe de la fonction $x \mapsto f(x) - x$.

Définition 1.1. *Un élément* $\alpha \in I$ *solution de l'équation* $f(x) = x$ *est appelé point fixe de* f*.*

En pratique : Si l'on a étudié le signe de $x \to f(x) - x$, un point fixe est un point en lequel cette fonction s'annule.

La propriété suivante est importante dans de nombreux contextes :

Propriété 1.2 (Théorème du point fixe)**.** *Avec les notations qui précèdent, supposons que* (u_n) *admette une limite* $l \in I$ *et que* f *soit continue en* l*. Alors* l *est un point fixe de* f*.*

Démonstration :

Utilisation de l'inégalité des accroissements finis (IAF) : Lorsque la suite n'est pas monotone, ou pour préciser la vitesse de convergence, on utilise parfois l'IAF. Cette technique nécessite de pouvoir majorer la valeur absolue de la dérivée sur I : $\forall x \in I, |f'(x)| \leq K$. On en déduit grâce à l'IAF que pour tout $(a,b) \in I^2$, $|f(b) - f(a)| \leq K\,|b-a|$. En particulier, si $\alpha \in I$ est un point fixe de f, pour tout $n \geq 0$, $|f(u_n) - f(\alpha)| \leq K\,|u_n - \alpha|$, c'est à dire $|u_{n+1} - \alpha| \leq K\,|u_n - \alpha|$. On en déduit par récurrence que pour tout n, $|u_n - \alpha| \leq K^n\,|u_0 - \alpha|$. Si $K < 1$, on peut en conclure que (u_n) converge vers α (on détaillera sur un exemple en TD).

2 Séries : définitions et premières propriétés

Ce paragraphe reprend essentiellement ce qui a été vu en première année. Les propriétés seront admises.
Étant donnée une suite $(u_n)_{n\geq 0}$, l'étude de la série de terme général u_n est l'étude de la convergence de la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \ .$$

Définition 2.1. *Lorsque la suite de ces sommes partielles converge (c'est à dire admet une limite finie), on dit que la série de terme général u_n converge ; sinon, on dit qu'elle diverge. En cas de convergence, on définit la somme de la série par :*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} S_n \ .$$

Notation : Au lieu d'écrire " montrer que la série de terme général u_n converge ", on écrira souvent " montrer que $\sum u_n$ converge " ou bien " montrer que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge ". Il s'agit juste d'une abréviation ; on ne présuppose pas en écrivant cela que la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ existe. La confusion peut venir du fait que $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ sont des écritures proches qui ne désignent pas la même chose.

Les premières propriétés des séries sont les suivantes.

Propriété 2.2. *Si la série de terme général u_n converge, alors la suite (u_n) tend vers 0.*

Remarques 2.3.
- **Contraposée :** *Si la suite u_n ne tend pas vers 0, on peut donc conclure directement que $\sum u_n$ diverge. On dit alors qu'elle diverge grossièrement.*
- **Réciproque :** *La réciproque de la propriété qui précéde est fausse, comme le montre l'exemple de $\sum 1/n$, qui diverge.*

Propriété 2.4 (Changement d'indice de départ)**.** *Quel que soit $n_0 \geq 0$, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge si et seulement si la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge. En cas de convergence, on a :* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{n_0-1} u_n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.

Propriété 2.5 (Réindexation)**.** *Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, alors, pour tout $n_0 \geq 0$,* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_{k-n_0}$.

Propriété 2.6 (Linéarité)**.** *Si les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ convergent, et si λ et μ sont deux nombres réels, alors, la série $\sum_{n\geq 0}(\lambda u_n \ + \ \mu v_n)$ converge et on a :* $\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda\, u_n \ + \ \mu\, v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \ + \ \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

3 Séries : sommes usuelles

On peut montrer en utilisant l'expression des sommes finies des suites géométriques la convergence des séries géométriques (et dérivées) de raison $q \in]-1,1[$:

Propriété 3.1 (Série géométrique)**.** *Les séries* $\sum q^n$, $\sum nq^{n-1}$ *et* $\sum n(n-1)q^{n-2}$ *convergent ssi* $q \in]-1,1[$ *et on a :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad ; \sum_{n=n_0}^{+\infty} q^n = q^{n_0}\frac{1}{1-q} \quad ; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \quad ; \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3} \ .$$

On admet la convergence de la série exponentielle :

Propriété 3.2 (Série exponentielle)**.** *Soit* $x \in \mathbb{R}$. *La série* $\sum \frac{x^n}{n!}$ *converge et on a :* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

Exemples 3.3. *Calculer les sommes suivantes (on justifiera brièvement leur convergence).*

1. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^n$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^2\left(\frac{1}{2}\right)^n$

4 Comparaison des suites

Les définitions et propriétés sont similaires à celles concernant les fonctions (ainsi que les démonstrations, que l'on ne refait pas dans ce cadre). Par contre, on ne considère que des limites lorsque n tend vers $+\infty$ (et parfois on ne précise pas).

Définition 4.1. *On dit que (u_n) est négligeable devant (v_n) (lorsque n tend vers $+\infty$) lorsqu'il existe une suite (ϵ_n) telle que*

- *il existe n_0 tel que : $\forall n \geq n_0$, $u_n = v_n\ \epsilon_n$;*
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \epsilon_n = 0$

On note alors : $u_n = \underset{+\infty}{o}(v_n)$ (souvent : $u_n = o(v_n)$).

Exemple 4.2.
- $n = o(n^2)$
- $u_n = o(1)$ *signifie que* $\lim u_n = 0$.

Propriété 4.3. *On garde les notations qui précèdent et on suppose de plus que (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Alors*

$$u_n = o(v_n)$$

si et seulement si

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0\ .$$

On reformule ainsi les règles de croissance comparées :

Propriété 4.4. *Pour tout $\alpha > 0$, $\beta > 0$, et $q > 1$,*

- $n^\alpha = o\left(q^n\right)$;
- $q^n = o\left(n!\right)$.
- $(\ln n)^\beta = o\left(n^\alpha\right)$;

Propriété 4.5 (Règles de manipulation des o).
- *Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.*
- *Si u_n admet une limite finie et $v_n = o(u_n)$, alors v_n tend vers 0.*
- *Si $u_n = o(v_n)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda u_n = o(v_n)$; si de plus $\lambda \neq 0$, $u_n = o(\lambda v_n)$.*
- *Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n + v_n = o(w_n)$.*
- *Si $u_n = o(r_n)$ et $v_n = o(s_n)$, alors $u_n \times v_n = o(r_n \times s_n)$.*

Définition 4.6. *On dit que (u_n) et (v_n) sont équivalentes s'il existe une suite (γ_n) telle que*

- *il existe n_0 tel que : $\forall n \geq n_0$, $u_n = v_n\ \gamma_n$;*
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \gamma_n = 1$

On note alors : $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ (souvent : $u_n \sim v_n$).

Exemple 4.7.
- $n^2 \sim n^2 - 3n + 1$.
- *On peut retenir (et utiliser) le fait qu'une suite étant un polynôme en n est équivalente à son terme de plus haut degré.*
- *si* $\lim u_n = l$ *et $l \neq 0$, $u_n \sim l$. Attention, cela est faux si* $\lim u_n = 0$. *De manière générale, on n'écrit jamais $u_n \sim 0$.*

On peut également caractériser l'équivalence par le quotient :

Propriété 4.8. *On garde les notations qui précèdent et on suppose de plus que (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Alors $u_n \sim v_n$ si et seulement si*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1\ .$$

On a également :

Propriété 4.9. *On a $u_n \sim v_n$ si et seulement si*

$$u_n = v_n + o(v_n) \ .$$

Propriété 4.10 (Équivalents usuels)**.** *Soit (u_n) une suite qui tend vers 0. Alors*

- $\ln(1+u_n) \sim u_n$
- $e^{u_n} - 1 \sim u_n$
- *Pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$*

On peut également effectuer ces substitutions dans des DL2 en 0.

Exemple 4.11. *Déterminer un équivalent simple de chacune des suites suivantes :*

- $\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$
- $\sqrt{1 + e^{-n}} - 1$

Propriété 4.12. *Soit (u_n), (v_n), (r_n), (s_n) des suites telles que $u_n \sim r_n$ et $v_n \sim s_n$; alors on a :*

- $u_n \times v_n \sim r_n \times s_n$
- $\frac{u_n}{v_n} \sim \frac{r_n}{s_n}$
- *si $\alpha \in \mathbb{R}$, $(u_n)^\alpha \sim (r_n)^\alpha$*
- $|u_n| \sim |r_n|$

Remarque 4.13. *Attention, la relation d'équivalence n'est pas compatible avec l'addition et la composition.*

Les équivalents permettrons également de déterminer des limites.

Propriété 4.14. *Si (u_n) admet une limite l et si $v_n \sim u_n$, alors (v_n) admet également l pour limite.*

Exemple 4.15. *Déterminer la limite de $u_n = (2n^2 + 3n - 7)\left(e^{1/3n^2} - 1\right)$.*

5 Applications aux séries

5.1 Séries à termes positifs

Dans ce paragraphe, on va voir que les comparaisons entre suites permettent de conclure sur la convergence de séries.

Lemme 5.1. *Soit (u_n) une suite à termes positifs. Alors la suite des sommes partielles associée (S_n) est croissante.*

Démonstration :

Propriété 5.2. *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ des suites telles que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq v_n \ .$$

Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge ; et dans ce cas on a de plus : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Démonstration :

Remarque 5.3. *On utilise souvent la contraposée : si $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ sont des suites telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq v_n$, et si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum v_n$ diverge.*

Corollaire 5.4. *Soit* $(u_n)_{n\geq 0}$ *et* $(v_n)_{n\geq 0}$ *des suites à termes positifs telles que* $u_n = o(v_n)$. *Si la série* $\sum v_n$ *converge, alors la série* $\sum u_n$ *converge.*

Démonstration :

Exemple 5.5. *Montrer la convergence des séries suivantes :*

- $\sum \frac{1}{n2^n}$
- $\sum \frac{n^3}{3^n}$

Corollaire 5.6. *Soit* $(u_n)_{n\geq 0}$ *et* $(v_n)_{n\geq 0}$ *des suites à termes positifs telles que* $u_n \sim v_n$. *La série* $\sum v_n$ *converge si et seulement si la série* $\sum u_n$ *converge.*

Démonstration :

Remarque 5.7. *Bien noter que ces propriétés ne peuvent être utilisées qu'avec des séries à termes positifs.*

5.2 Séries de Riemann

Ces séries serviront souvent de point de comparaison.

Propriété 5.8. *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$. *La série* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ *est convergente si et seulement si* $\alpha > 1$.

Démonstration : (cas $\alpha > 1$, voir TD pour la réciproque)

Exemple 5.9. *Étudier la convergence de la série* $\sum \frac{n+3}{2n^3+n^2+n+1}$.

5.3 Séries à termes quelconques

Pour une série à termes non tous postifs, on utilisera souvent la notion de convergence absolue.

Définition 5.10. *On dit que la série* $\sum u_n$ *converge absolument lorsque la série* $\sum |u_n|$ *converge.*

Propriété 5.11 (admis). *Si la série* $\sum u_n$ *converge absolument, alors elle converge.*

Remarque 5.12. *La réciproque de ce théorème est fausse, comme le montre l'exemple de la série* $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ *(voir TD).*

Exemple 5.13. *Étudier la convergence de la série* $\sum \frac{n-3}{-2n^3+n^2-n+1}$.