

DS n°4 - Concours Blanc

le 05/11/2025

Durée : 4h

- L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
- La clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une grande part dans la notation.
- Le résultat d'une question peut être admis afin de traiter une question suivante.
- On encadrera le résultat de chaque question.

Exercice 1

Partie A

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1$$

et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = 7u_n + 8u_{n-1}.$$

1. Recopier et compléter le script Python ci-dessous pour qu'il calcule u_n pour n entier naturel entré par l'utilisateur :

```
n = int(input('entrer un entier n' : ))
u = 0
v = 1
for k in range(...
    w = u
    u = .....
    v = .....

print(u)
```

2. Montrer que la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $s_n = u_{n+1} + u_n$ est une suite géométrique de raison 8. En déduire l'expression de s_n en fonction de n .
3. On pose pour tout entier naturel n :

$$v_n = (-1)^n u_n \quad \text{ct} \quad t_n = v_n - v_{n+1}$$

- (a) Exprimer t_n en fonction de s_n pour tout entier naturel n
- (b) En déduire que pour tout $n \geq 0$, on a $t_n = (-8)^n$
4. Soit n un entier naturel non nul.
 - (a) Calculer la somme $\sum_{i=0}^{n-1} (-8)^i$
 - (b) Justifier que : $\sum_{i=0}^{n-1} (v_i - v_{i+1}) = -v_n$.
 - (c) En déduire l'expression de v_n en fonction de n , puis vérifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{(-1)^{n+1} + 8^n}{9}$$

- (d) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- (e) Écrire un programme Python qui détermine et affiche le premier entier n tel que $u_n \geq 10^6$.

Partie B

On considère les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $M^2 - 7M - 8I$.
2. En déduire que M est inversible et exprimer M^{-1} en fonction de M et de I .
3. (a) On pose : $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$. Vérifier que : $M^0 = a_0M + b_0I$.
 (b) Déterminer deux réels a_1 et b_1 tels que : $M^1 = a_1M + b_1I$.
 (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe deux réels a_n et b_n tels que : $M^n = a_nM + b_nI$. Prouver alors que :

$$M^{n+1} = a_n(7M + 8I) + b_nM$$

En déduire deux réels a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n tels que $M^{n+1} = a_{n+1}M + b_{n+1}I$

- (d) Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = u_n$$

où (u_n) est la suite définie dans la Partie A.

Exercice 2 :

Une urne contient des boules blanches et des boules noires. La proportion de boules blanches est p et la proportion de boules noires est q .

Ainsi, on a : $0 < p < 1$, $0 < q < 1$ et $p + q = 1$.

Partie I : Tirages avec arrêt dès qu'une boule noire a été obtenue

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu une boule noire.

On note T la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués et U la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Reconnaître la loi de T . Pour tout entier $k \geq 1$, donner $P(T = k)$ et rappeler l'espérance et la variance de T .
2. En déduire que U admet une espérance et une variance. Déterminer $E(U)$ et $V(U)$.

Partie II : Tirages avec arrêt dès qu'une boule blanche et une boule noire ont été obtenues

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu au moins une boule blanche et au moins une boule noire.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

On note Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

On note Z la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues.

Ainsi, on peut remarquer que la probabilité de l'événement $(Y = 1) \cup (Z = 1)$ est égale à 1.

Pour tout entier naturel non nul i , on note :

B_i l'événement "la i -ème boule tirée est blanche",

N_i l'événement "la i -ème boule tirée est noire".

1. (a) Montrer, pour tout entier $k \geq 2$: $P(X = k) = q p^{k-1} + p q^{k-1}$.

- (b) Vérifier : $\sum_{k=2}^{+\infty} P(X = k) = 1$.

- (c) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que : $E(X) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$.

2. On cherche à simuler cette expérience aléatoire.

- (a) Compléter la fonction suivante afin qu'elle prenne en argument une valeur de p , simule l'expérience aléatoire et renvoie la valeur de X obtenue lors de cette simulation :

```
import numpy.random as rd

def simul(p):
    X=0 # nombre de tirages effectués
    Y=0 # nombre de boules blanches obtenues
    Z=0 # nombre de boules noires obtenues
    while Y ... or Z ...
        tir = rd.random()
        if tir < p :
            ...
        else :
            ...
        X = ...
    return ...
```

(b) On effectue ensuite le programme suivant à partir de cette fonction :

```
p = 0.5
n = 10000
S = 0
for i in range(n):
    S = S + simul(p)

moy=S/n
print(moy)
```

Expliquer ce que permet d'obtenir ce programme.

La valeur affichée suite à l'exécution est 3,0034. Est-ce cohérent avec les résultats précédents ?

3. (a) Pour tout entier $k \geq 2$, déterminer $P((X = k) \cap (Y = 1))$

(On distinguera les cas $k = 2$ et $k \geq 3$.)

(b) En déduire : $P(Y = 1) = q(1 + p)$.

(c) Déterminer la loi de la variable aléatoire Y .

On admet que l'espérance de Y existe et que : $E(Y) = \frac{1}{q}(1 - p + p^2)$.

4. Donner la loi de Z et son espérance.

5. Montrer que les variables aléatoires Y , Z et $X - 1$ sont égales.

6. Montrer que le couple (Y, Z) admet une covariance et exprimer $\text{cov}(Y, Z)$ à l'aide de $E(X)$, $E(Y)$ et $E(Z)$.

Exercice 3 :

Partie A : Étude de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

On s'intéresse à la suite récurrente $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n e^{1/u_n}$.

1. (a) Montrer que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Donner le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(c) Démontrer, en raisonnant par l'absurde, que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet $+\infty$ comme limite.

2. Recopier et compléter le programme Python ci-dessous de sorte qu'il affiche le premier entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geq 10^6$.

```
import numpy as np
u = 1
n = 0
while ... :
    u = ...
    n = ...
print(...)
```

Partie B : Étude de la fonction f

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x > 0, \quad f(x) = x e^{1/x}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

3. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en 0.

4. Dresser le tableau de variation de f sur $]0, +\infty[$.

5. Soit $x > 0$.

(a) Justifier la convergence de la série $\sum_{k \geq 0} \frac{x^{-k}}{k!}$ et calculer sa somme.

(b) En déduire que :

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{x} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!}.$$

6. Soit $x \geq 1$.

(a) Établir séparément les inégalités suivantes :

$$\frac{1}{2} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!} \leq e.$$

(b) En déduire que :

$$(*) \quad \frac{1}{2x} \leq f(x) - (x+1) \leq \frac{e}{x}.$$

7. Montrer que $f(x) = x + 1 + o(1)$ au voisinage de $+\infty$.

8. Représenter sur un même dessin la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite d'équation $y = x + 1$.

Partie C : Comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

9. (a) Montrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) = \frac{1}{u_k}$.

(b) En déduire que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$.

10. (a) À l'aide de l'encadrement $(*)$ montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$1 + \frac{1}{2u_k} \leq u_{k+1} - u_k \leq 1 + \frac{e}{u_k}.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, établir :

$$n + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} \leq u_n - 1 \leq n + e \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k},$$

puis

$$1 + \frac{1}{2} \ln(u_n) \leq u_n - n \leq 1 + e \ln(u_n).$$

11. (a) Justifier que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n} = 0$.

(b) En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

12. Déterminer un équivalent simple de $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.