DS n°2

le 18/10/2024
Durée : 4h

— L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
— La clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une grande part dans la notation.
— Le résultat d'une question peut être admis afin de traiter une question suivante.
— On encadrera le résultat de chaque question.

Exercice 1

On dispose de deux urnes $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$. L'urne $\mathcal{U}_1$ contient 3 boules rouges et 2 boules vertes ; L'urne $\mathcal{U}_2$ contient 1 boules rouges et 4 boules vertes.
On choisit une des deux urnes au hasard (chacune ayant la même probabilité d'être choisie) ; puis on tire dans l'urne choisie une boule que l'on remet ensuite dans la même urne. Ensuite,

— si la boule tirée est rouge, on effectue un second tirage d'une boule dans l'urne $\mathcal{U}_1$;
— si la boule tirée est verte, on effectue un second tirage d'une boule dans l'urne $\mathcal{U}_2$.

On définit alors deux variables aléatoires X_1 et X_2 par :

$$X_1 = \begin{cases} 1 & \text{si la première boule tirée est rouge} \\ 0 & \text{si la première boule tirée est verte} \end{cases} \quad ; \quad X_2 = \begin{cases} 1 & \text{si la deuxième boule tirée est rouge} \\ 0 & \text{si la deuxième boule tirée est verte} \end{cases}$$

On pose également $Z = X_1 + X_2$.

1. (a) Déterminer $P([X_1 = 1])$ (on détaillera la méthode utilisée). Quelle loi suit X_1 ?
   (b) Donner $E(X_1)$ et $V(X_1)$.
2. (a) Montrer que $P([X_2 = 0] \cap [Z = 0]) = \dfrac{12}{25}$.
   (b) Donner sous forme d'un tableau la loi du couple (X_2, Z).
3. (a) Déterminer la loi de X_2, ainsi que $E(X_2)$ et $V(X_2)$.
   (b) les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
   (c) Déterminer la loi de Z.
   (d) Calculer $E(Z)$ et montrer que $V(Z) = \dfrac{414}{625}$.
4. On considère l'événement «la première boule tirée est verte». Calculer la probabilité que cette boule verte provienne d'un tirage dans l'urne $\mathcal{U}_1$.
5. On se propose dans cette question de calculer $V(Z)$ par une autre méthode.
   (a) Calculer $E(X_2 Z)$.
   (b) Montrer que $cov(X_2, Z) = \dfrac{204}{625}$.
   (c) En déduire la valeur de $cov(X_1, X_2)$.
   (d) Utiliser le résultat précédent pour calculer $V(Z)$.
6. On cherche maintenant à simuler cette expérience aléatoire afin d'obtenir une estimation empirique de $E(Z)$.
   (a) On aura plusieurs épreuves de Bernoulli à simuler. Écrire tout d'abord une fonction `simulBer(p)` qui renvoie 1 avec une probabilté p et 0 avec une probabilité $1 - p$.
   On supposera le module `numpy.random` importé par la commande `import numpy.random as rd`. On rappelle qu'alors la commande `rd.random()` renvoie un nombre aléatoire choisi uniformément dans l'intervalle $[0, 1]$.

(b) Compléter la fonction suivante afin qu'elle simule l'expérience aléatoire et renvoie la valeur de Z obtenue.

```
def simulZ() :
    # on effectue tout d'abord une première épreuve de Bernoulli
    #pour décider de l'urne dans laquelle on effectue le premier tirage.
    X=simulBer(...)
    if X==1 : # alternative correspondant à un tirage dans l'urne 1
        X1 = simulBer(...)
    else : # alternative correspondant à un tirage dans l'urne 2
        ...

    #On effectue maintenant le deuxième tirage
    if X1 == 1 :
        X2 = ...
    else :
        X2 = ...

    Z = ...
    return Z
```

(c) Écrire une suite d'instructions (utilisant la fonction précédente) permettant de simuler 10000 fois l'expérience aléatoire et d'obtenir une valeur empirique de $E(Z)$.

(d) Après exécution de ce programme, on obtient la valeur $0,7625$.
Cette valeur est-elle cohérente avec la valeur théorique de $E(Z)$?

Exercice 2

Soit a un élément de $]0,1[$ et $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = a$ et, pour $n \geq 0$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Recopier et compléter le script du programme Python suivant, pour qu'il affiche la valeur de u_{100} (on supposera que a vaut $0,5$).

```
n = 100
u = ........
...
     ...

print(.......)
```

2. **Étude la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.**
   (a) Montrer que si $x \in]0,1[$, alors $x - x^2 \in]0,1[$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,1[$.
   (c) Montrer que (u_n) est décroissante.
   (d) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
3. **Étude de la série de terme général u_n^2.**
   (a) Exprimer u_k^2 en fonction de u_k et u_{k+1}.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k^2 = u_0 - u_{n+1}$.
   (c) En déduire que la la série de terme général u_n^2 est convergente et déterminer sa somme.

4. **Étude de la série de terme général u_n.**
   (a) Montrer que, pour $n \geq 0$,
   $$\sum_{k=0}^{n} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_0)$$
   (b) En déduire que la série de terme général $-\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est divergente.
   (c) Exprimer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ puis $-\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ en fonction de u_n.
   (d) En déduire que la série de terme général u_n est de même nature que la série de terme général $-\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ et conclure.

Exercice 3

On effectue dans une urne, contenant initialement 1 boule blanche et 1 boule noire, une suite de tirages de la façon suivante :
— si les n premiers tirages ont tous donné une boule blanche (cette condition n'étant pas à prendre en compte pour le premier tirage), on procède au n-ième tirage ;
— si la boule obtenue est noire, ce n-ième tirage est le dernier ;
— si la boule obtenue est blanche, elle est replacée dans l'urne avec, en plus, une autre boule blanche (et l'urne est alors prête pour le $(n+1)$-ème tirage).
On introduit la variable aléatoire X égale au numéro du tirage final, si un tel tirage existe, et égale à 0 si à chaque tirage une boule blanche a été obtenue.

1. Donner sans calcul $X(\Omega)$ (on n'explicitera pas Ω).
2. Soit $n \geq 1$. Décrire l'événement $(X = n)$ et en déduire sa probabilité. On pourra introduire la suite d'événements A_n : " le n-ième tirage a donné une boule blanche ".
3. Déterminer deux nombres réels a et b tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$.
4. Exprimer en fonction de $n \geq 1$ la somme : $\sum_{k=1}^{n} P(X = k)$.
5. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) = 1$ (après avoir montré que la série converge).
   En déduire la valeur de $P(X = 0)$.
6. Étudier l'existence de l'espérance de X.

Exercice 4

Dans cet exercice, p désigne un réel de $]0,1[$; on note $q = 1 - p$.
On considère deux variables aléatoires X et Y, définies sur une même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant chacune une loi géométrique de paramètre p.

1. On pose $Z = inf(X,Y)$ et on admet que Z est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
   On rappelle que, pour tout entier naturel k, $[Z > k] = [X > k] \cap [Y > k]$.
   (a) Calculer, pour tout entier naturel k, $P(Z > k)$.
   (b) Établir que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 1,
   $$P(Z = k) = P(Z > k - 1) - P(Z > k) \ .$$
   (c) En déduire que Z suit une loi géométrique de paramètre $1 - q^2$.
2. On définit la variable aléatoire T de la façon suivante :
   pour tout $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega)$ est un entier pair, on pose $T(\omega) = \frac{1}{2}X(\omega)$;
   pour tout $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega)$ est un entier impair, on pose $T(\omega) = \frac{1}{2}(X(\omega) + 1)$.
   (a) Montrer que T prend des valeurs entières non nulles.
   (b) Réciproquement, justifier que tout entier naturel k non nul est élément de $T(\Omega)$; en déduire que $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
   (c) Exprimer l'événement $[T = k]$ en fonction de certains des événements $[X = i]$; en déduire que T suit la même loi que Z.
   (d) Déterminer l'espérance de T.
3. Simulation informatique.
   (a) La commande python `n%2` renvoie le reste de la division euclidienne de n par 2. Si ce reste vaut 0, n est pair, sinon, n est impair.
   Compléter la fonction suivante afin qu'elle simule tout d'abord la variable aléatoire X de loi géométrique puis ensuite simule la variable aléatoire T et retourne la valeur simulée.

```python
import numpy.random() as rd
def simulT(p):
    n=1
    while rd.random() ...
        n = ...

    if ...    :
        T = ...
    else :
        T = ...
    return T
```

   (b) .
   On effectue le programme suivant :

```python
p = 0.4
N = 10000
S = 0
for i in range(1,N+1):
    S = S + simulT(p)

print(S/N)
```

   La valeur affichée est `1.563`.
   Expliquer la signification de cette valeur.
   Est-elle cohérente avec les calculs effectués précédemment ?