Corrigé du DS n°4 - Concours Blanc

le 05/11/2025
Durée : 4h

— L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
— La clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une grande part dans la notation.
— Le résultat d'une question peut être admis afin de traiter une question suivante.
— On encadrera le résultat de chaque question.

Exercice 1

1.
```
n = int(input('entrer un entier n'  : ))
u = 0
v = 1
for k in range(1,n+1):
     w = u   # w prend la valeur u_{k-1}
     u = v   # u prend la valeur  u_{k}
     v = 7*v + 8*w   # v prend la valeur  u_{k+1}

print(u)
```

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*, s_n = u_{n+1} + u_n = 7u_n + 8u_{n-1} + u_n = 8(u_n + u_{n-1}) = 8s_{n-1}$.
Donc $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 8.
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}, s_n = 8^n s_0 = 8^n$.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$,
$$t_n = v_n - v_{n+1} = (-1)^n u_n - (-1)^{n+1} u_{n+1} = (-1)^n u_n + (-1)^n u_{n+1} = (-1)^n (u_n + u_{n+1}) = (-1)^n s_n.$$
(b) Donc, pour tout $n \geqslant 0$, on a $t_n = (-8)^n$ car $s_n = 8^n$.

4. Soit n un entier naturel non nul.

(a) Avec $-8 \neq 1$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}(-8)^i = \frac{1-(-8)^n}{1-(-8)} = \frac{1-(-8)^n}{9}$.

(b) On reconnaît une somme télescopique
$$\sum_{i=0}^{n-1}(v_i - v_{i+1}) = (v_0 - v_1) + (v_1 - v_2) + ... + (v_{n-2} - v_{n-1}) + (v_{n-1} - v_n) = v_0 - v_n.$$
Or $v_0 = (-1)^0 u_0 = 0$ donc $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}(v_i - v_{i+1}) = -v_n$.

(c) Donc
$$v_n = -\sum_{i=0}^{n-1}(v_i - v_{i+1}) = -\sum_{i=0}^{n-1} t_i = -\sum_{i=0}^{n-1}(-8)^i = \frac{(-8)^n - 1}{9}.$$
On sait que $v_n = (-1)^n u_n$ donc (on utilise le fait que $(-1)^n(-1)^n = (-1)^{2n} = 1$) :
$$u_n = (-1)^n(-1)^n u_n = (-1)^n v_n = (-1)^n \times \frac{(-8)^n - 1}{9} = \frac{(-1)^n(-1)^n(8)^n - (-1)^n}{9} = \frac{(8)^n + (-1)^{n+1}}{9}.$$

(d) On a $u_n = 8^n \dfrac{1-(-1/8)^n}{9}$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1/8)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 8^n = +\infty$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

(e) On pouvait

— soit utiliser l'expression de u_n obtenue dans la question (c) :

```
n = 0
u = (-1)**(n+1)+ 8**n # ici
u vaut u_0
while u < 10**6:
    n = n+1
    u = (-1)**(n+1)+8**n

print(n)
```

— soit repartir de la définition de la suite (u_n) :

```
n=0
u=0 ; v=1
while u < 10**6:
    w = u
    u = v
    v = 7*v +8*w
    n=n+1

print(n)
```

Partie B

1. On calcule
$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 21 & 21 \\ 21 & 22 & 21 \\ 21 & 21 & 22 \end{pmatrix}$$
donc
$$M^2 - 7M - 8I_3 = \begin{pmatrix} 22 & 21 & 21 \\ 21 & 22 & 21 \\ 21 & 21 & 22 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -14 & -21 & -21 \\ -21 & -14 & -21 \\ -21 & -21 & -14 \end{pmatrix} - 8\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0_3.$$

2. On isole I_3 dans ce qui précède
$$8I_3 = M^2 - 7M = M(M - 7I_3) = (M - 7I_3)M \text{ donc } I_3 = M\left(\frac{1}{8}M - \frac{7}{8}I_3\right) = \left(\frac{1}{8}M - \frac{7}{8}I_3\right)M$$
Donc M est inversible et $M^{-1} = \frac{1}{8}M - \frac{7}{8}I_3$.

3. (a) On pose : $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$. Par définition $M^0 = I = 0 \times M + 1 \times I = a_0M + b_0I$.
   (b) On pose $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$ ainsi $a_1M + b_1I = M = M^1$.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe deux réels a_n et b_n tels que : $M^n = a_nM + b_nI$. Avec la question B(1), on sait que $M^2 = 7M + 8I$. Donc
$$M^{n+1} = M \times M^n = M(a_nM + b_nI) = a_nM^2 + b_nM = a_n(7M + 8I) + b_nM.$$
   Donc on a $M^{n+1} = a_n(7M+8I)+b_nM = (7a_n+b_n)M+8a_nI$. En posant $a_{n+1} = 7a_n+b_n$ et $b_{n+1} = 8a_n$ on a bien $M^{n+1} = a_{n+1}M + b_{n+1}I$.
   Avec les questions 3(a) et 3(c), on a montré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_n et b_n tels que : $M^n = a_nM + b_nI$.
   (d) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}_n$: $a_n = u_n$.
   On a vu $a_0 = u_0 = 0$, $a_1 = u_1 = 1$ donc $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$ sont vraies.
   Supposons $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n-1}$ vraies pour un $n \in \mathbb{N}^*$, comme $n-1 \in \mathbb{N}$, on a $b_n = 8a_{n-1}$ et
$$a_{n+1} = 7a_n + b_n = 7a_n + 8a_{n-1} = 7u_n + 8u_{n-1}$$
   selon $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n-1}$ donc $a_{n+1} = u_{n+1}$. On a montré que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
   Bilan : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = u_n$.

Exercice 2 :

D'après EML E 2009 Ex3

Partie I : Tirages avec arrêt dès qu'une boule noire a été obtenue

1. Tant que l'on n'a pas de boule noire, la probabilité d'en obtenir une reste q (boules équiprobables). Donc T est le rang du premier succès dans un processus sans mémoire et

   Conclusion : $\boxed{T \hookrightarrow \mathcal{G}(q)\,,\ E(T) = \frac{1}{q},\ V(T) = \frac{p}{q^2} \text{ et pour tout } k \geq 1 : \mathrm{P}(T = k) = p^{k-1}q}$

2. $(U = k)$ signifie que $(T = k + 1)$ donc $U = T - 1$
   et

   Conclusion : $\boxed{U \text{ a une espérance et une variance, } E(U) = E(T) - 1 = \frac{p}{q} \text{ et } V(U) = V(T) = \frac{p}{q^2}}$

Partie II : Tirages avec arrêt dès qu'une boule blanche et une boule noire ont été obtenues

1. (a) Remarquons que X prend ses valeurs dans $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
   $(X = k)$ signifie que l'on a effectué k tirages :
   on a donc eu $k-1$ blanches puis une noire ou $k-1$ noires puis une blanche. (ces deux événements étant incompatibles). Avec les notations introduites dans l'énoncé :

   $$[X = k] = (N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_{k-1} \cap B_k) \cup (B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap N_k)\ ,$$

   l'union étant disjointe. On a donc, en utilisant de plus l'indépendance des tirages :

   $$\mathrm{P}(X = k) = \mathrm{P}(N_1)\,\mathrm{P}(N_2)\cdots(N_{k-1})\,\mathrm{P}(B_k) + \mathrm{P}(B_1)\,\mathrm{P}(B_2)\cdots(B_{k-1})\,\mathrm{P}(N_k)\ .$$

   Conclusion : $\boxed{\text{pour tout entier } k \geq 2 : \mathrm{P}(X = k) = q\ p^{k-1} + p\ q^{k-1}.}$

   (b) La série converge car il s'agit d'une combinaison linéaire de série géométriques de raison p et q (tous deux éléments de $]0, 1[$). On a

   $$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{+\infty} \mathrm{P}(X = k) &= \sum_{k=2}^{+\infty} \left[q\ p^{k-1} + p\ q^{k-1}\right] \\ &= q \sum_{h=1}^{+\infty} p^h + p \sum_{h=1}^{+\infty} q^h \\ &= qp\frac{1}{1-p} + pq\frac{1}{1-q} \\ &= p + q \\ &= 1 \end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{\sum_{k=2}^{+\infty} \mathrm{P}(X = k) = 1}$

   (c) Pour $k \geq 2$, on a $|k\mathrm{P}(X = k)| = k\mathrm{P}(X = k) = q\ kp^{k-1} + p\ kq^{k-1}$.
   Il s'agit d'une combianison linéaire de termes généraux de séries géométriques dérivées de raison p et q ; donc cette série converge absolument et X a une espérance.

   $$\begin{aligned} E(X) &= q\sum_{k=2}^{+\infty} kp^{k-1} \ +\ p\sum_{k=2}^{+\infty} kq^{k-1} \\ &= q\left(\frac{1}{(1-p)^2} - 1\right) \ +\ p\left(\frac{1}{(1-q)^2} - 1\right) \\ &= \frac{q}{q^2} - q + \frac{p}{p^2} - p \\ &= \frac{1}{q} + \frac{1}{p} - 1 \end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{X \text{ admet une espérance et que : } E(X) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1.}$

2. (a)

```
def simul(p):
    X=0 # nombre de tirages effectu\'es
    Y=0 # nombre de boules blanches obtenues
    Z=0 # nombre de boules noires obtenues
    while Y < 1 or  Z < 1 :
        tir = rd.random()
        if tir<p :
            Y = Y + 1
        else :
            Z = Z + 1
        X = X + 1
    return X
```

(b) Ce programme calcule la moyenne des valeurs obtenues pour X lorsque l'on répète 10000 fois l'expérience aléatoire (avec $p = 0.5$). Cette moyenne permet d'approcher la valeur de l'espérance de X.
Lorsque $p = 0.5$, le résultat de la question 1.(c) donne $E(X) = 2 + 2 - 1 = 3$. La valeur $3,0034$ affichée est donc cohérente avec ce résultat.

3. (a) Pour $k = 2$, $(X = 2) \cap (Y = 1)$ signifie que l'on a effectué 2 tirages et obtenu une seule blanche (donc une seule noire)
On a donc pu avoir $N_1 \cap B_2$ ou $B_1 \cap N_2$ (incompatibles) et $\mathrm{P}((X = 2) \cap (Y = 1)) = pq + qp = 2pq$
Si $k \geq 3$ alors $(X = k) \cap (Y = 1)$ signifie que l'on n'a obtenu qu'une seule blanche (et plusieurs noires) et donc s'est arrêté sur une boule blanche.
$(X = k) \cap (Y = 1) = N_1 \cap \cdots \cap N_{k-1} \cap B_k$ et $\mathrm{P}((X = k) \cap (Y = 1)) = q^{k-1}p$
Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}((X = 2) \cap (Y = 1)) = 2pq \text{ et pour } k \geq 3 : \mathrm{P}((X = k) \cap (Y = 1)) = q^{k-1}p}$

(b) La loi de Y est une loi marginale du couple (X, Y) donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y = 1) &= \sum_{k=2}^{+\infty} \mathrm{P}((X = k) \cap (Y = 1)) \\
&= \mathrm{P}((X = 2) \cap (Y = 1)) + \sum_{k=3}^{+\infty} \mathrm{P}((X = k) \cap (Y = 1)) \\
&= 2pq + \sum_{k=3}^{+\infty} q^{k-1}p = 2pq + p\sum_{h=2}^{+\infty} q^h \\
&= 2pq + p\left[\sum_{h=0}^{+\infty} q^h - 1 - q\right] \\
&= 2pq + p\left[\frac{1}{1-q} - 1 - q\right] \\
&= pq + \frac{p}{p} - p = 1 - p + pq \\
&= q + pq
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(Y = 1) = q(1 + p).}$

(c) $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour $n \geq 2$ quand $(Y = n)$ on a plus d'une blanche, donc on s'arrête sur une boule noire.
$(Y = n)$ signifie donc que l'on a eu n blanches puis une boule noire.
Donc $\mathrm{P}(Y = n) = p^n q$
Conclusion : $\boxed{Y(\Omega) = \mathbb{N}^* : \mathrm{P}(Y = 1) = q(1 + p) \text{ et } \mathrm{P}(Y = n) = p^n q \text{ pour } n \geq 2}$

4. En inversant les rôles de blanc et noir, on inverse les rôles de Y et de Z. La loi de Z est donc la même que celle de Y en inversant les rôles de p et de q.
Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l} Z(\Omega) = \mathbb{N}^* : \mathrm{P}(Z = 1) = p(1 + q).\text{et } \mathrm{P}(Z = n) = q^n p \text{ pour } n \geq 2 \\ \text{et } E(Z) = \dfrac{1}{p}\left(1 - q + q^2\right) \end{array}}$

5. Pour tout $k \geq 1$: $(X-1=k)$ signifie qu'il y a eu k tirages avant le changement de couleur.
Si les tirages se finissent par noir, on a alors $Y=k$ et $Z=1$ donc $Y\ Z=k$
Si les tirages se finissent par blanc, on a alors $Y=1$ et $Z=k$ donc $Y\ Z=k$
Conclusion : $\boxed{Y\ Z = X-1}$
6. Y et Z ont une espérance. X a une espérance donc $X-1$ et $Y\ Z$ également $E(Y\ Z)=E(X)-1$
Donc (Y,Z) admet une covariance et $\operatorname{cov}(Y,Z)=E(Y\ Z)-E(Y)E(Z)$
Conclusion : $\boxed{\operatorname{cov}(Y,Z)=E(X)-E(Y)E(Z)-1}$

Exercice 3 : EML 2025 Ex1

1. (a) On raisonne par récurrence :
<u>Initialisation :</u> par définition $u_0=1>0$, la propriété est initialisée.
<u>Hérédité :</u> supposons $u_n>0$ pour un certain rang $n\in\mathbb{N}$. Alors $u_n>0$ par hypothèse de récurrence et $e^{1/u_n}>0$ par positivité de l'exponentielle, par suite
$$u_{n+1}=u_ne^{1/u_n}>0.$$
Ceci montre que la propriété est héréditaire.
<u>Conclusion :</u> selon le principe de récurrence, on a $u_n>0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

(b) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :
$$u_{n+1}-u_n=u_ne^{1/u_n}-u_n=u_n\left(e^{1/u_n}-1\right)\ ;$$
or $u_n>0$ et donc $e^{1/u_n}>1$ et donc $u_n\left(e^{1/u_n}-1\right)>0$;
ainsi $u_{n+1}-u_n>0$.
$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est strictement croissante}}$.

(c) La suite (u_n) admet une limite (finie ou infinie) car elle est croissante.
Supposons par l'absurde qu'elle converge vers une limite finie ℓ, on a nécessairement $\ell>0$ puisque (u_n) est croissante. En passant à la limite dans le relation de récurrence, on trouve $\ell=\ell e^{1/\ell}$ par continuité de l'exponentielle, or
$$\begin{aligned}\ell=\ell e^{1/\ell} &\Leftrightarrow\quad 1=e^{1/\ell}\\ &\Leftrightarrow\quad 0=\frac{1}{\ell}\quad \text{absurde !}\end{aligned}$$
Ainsi la limite de (u_n) est infinie, plus précisément $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty}$ car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

2.
```
u = 1
n = 0
while u<10**6 :
    u = u*np.exp(1/u)
    n = n + 1
print(n)
```

3. <u>Limite en $+\infty$:</u> On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{X\to0}e^X=1$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{1/x}=1$ par composition de limites.
Par produit de limites on trouve :
$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}$.

<u>Limite en 0^+ :</u> On pose $X=\frac{1}{x}$, de sorte que $xe^{1/x}=\frac{e^X}{X}$.
Or $\lim\limits_{x\to0^+}X=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{e^X}{X}=+\infty$ par croissances comparées ;
d'où $\lim\limits_{x\to0^+}xe^{1/x}=+\infty$ par composition de limites, soit $\boxed{\lim\limits_{x\to0}f(x)=+\infty}$.

4. La fonction $x \mapsto e^{1/x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions dérivables, de ce fait f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions dérivables.
Pour tout $x > 0$,
$$f'(x) = 1 \times e^{1/x} - x \times \frac{e^{1/x}}{x^2} = \frac{e^{1/x}(x-1)}{x}.$$
On a $e^{1/x} > 0$ et $x > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, par conséquent $f'(x)$ est de même signe que $x-1$. On en déduit le tableau :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|$ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

5. (a) La série $\sum_{k\geq 0} \frac{x^{-k}}{k!} = \sum_{k\geq 0} \frac{\left(x^{-1}\right)^k}{k!}$ est de type exponentiel, par conséquent elle converge et
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{-k}}{k!} = \sum_{k\geq 0}^{+\infty} \frac{\left(x^{-1}\right)^k}{k!} = e^{\left(x^{-1}\right)} = e^{1/x}.$$

(b) On a :
$$\begin{aligned}
f(x) &= xe^{1/x} \\
&= x\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{-k}}{k!} \qquad \texttt{(question précédente)} \\
&= x\left(1 + \frac{1}{x} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{-k}}{k!}\right) \qquad \texttt{(sommation par paquets)} \\
&= x + 1 + x\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{-k}}{k!} \\
&= x + 1 + x \times \frac{1}{x^2}\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!} \qquad \texttt{(linéarité)} \\
&= \boxed{x + 1 + \frac{1}{x}\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!}}.
\end{aligned}$$

6. (a) <u>Minoration :</u> on a
$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!} = \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!} \geq \frac{1}{2} ;$$
car la série $\sum_{k\geq 3} \frac{x^{2-k}}{k!}$ est à termes positifs.
<u>Majoration :</u> pour tout $k \geq 2$ on a $2 - k \leq 0$, d'où $x^{2-k} \leq 1$ car $x \geq 1$. Ainsi
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{x^{2-k}}{k!} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!},$$
pour tout $n \geq 2$. En faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient :
$$\boxed{\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!} \leq e}.$$

(b) Par la question 5–b) on sait que :
$$f(x) - (x+1) = \frac{1}{x}\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!}.$$

Ainsi, en partant de l'encadrement obtenu à la question précédente, il vient :

$$\frac{1}{2} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{x^{2-k}}{k!} \leq e$$

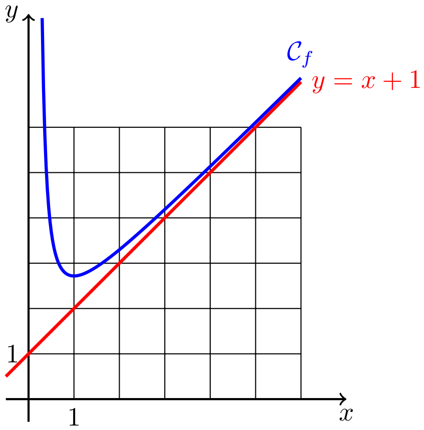
$$\frac{1}{2x} \leq \frac{1}{x}\sum_{k=2}^{n} \frac{x^{2-k}}{k!} \leq \frac{e}{x}$$

$$\boxed{\frac{1}{2x} \leq f(x) - (x+1) \leq \frac{e}{x}}.$$

7. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e}{x} = 0$, par le théorème des gendarmes cela implique

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (x+1) = 0$$

autrement dit $\boxed{f(x) - (x+1) = o(1) \text{ lorsque } x \text{ tend vers } +\infty}$.



8.

9. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$, par définition on a $u_{k+1} = u_k e^{1/u_k}$, sachant que la suite est à termes strictement positifs on peut prendre le logarithme de chacun des membres :

$$\begin{aligned} \ln(u_{k+1}) &= \ln\left(u_k e^{1/u_k}\right) \\ &= \ln(u_k) + \ln\left(e^{1/u_k}\right) \\ &= \ln(u_k) + \frac{1}{u_k} \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) = \frac{1}{u_k}}.$$

(b) On somme l'égalité précédente pour k allant de 0 à $n-1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} \\ \ln(u_n) - \ln(u_0) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} \qquad (\texttt{par télescopage}) \\ \ln(u_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} \quad (\texttt{car } u_0 = 1) \end{aligned}$$

10. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$, on sait que la suite (u_n) est croissante avec $u_0 = 1$, par conséquent $u_k \geq 1$. On peut ainsi appliquer l'encadrement $(*)$ avec $x = u_k$, on obtient :

$$\frac{1}{2u_k} \leq f(u_k) - u_k - 1 \leq \frac{e}{u_k},$$

sachant que $f(u_k) = u_{k+1}$ et en ajoutant 1 à chaque membre, on arrive à :

$$\boxed{1 + \frac{1}{2u_k} \ \le\ u_{k+1} - u_k \ \le\ 1 + \frac{e}{u_k}}.$$

(b) On somme chaque membre pour k allant de 0 à $n-1$, :

$$\sum_{k=0}^{n-1} 1 + \frac{1}{2u_k} \ \le\ \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - u_k \ \le\ \sum_{k=0}^{n-1} 1 + \frac{e}{u_k}.$$

Par télescopage :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - u_k = u_n - u_0 = u_n - 1,$$

Par linéarité :

$$\sum_{k=0}^{n-1} 1 + \frac{1}{2u_k} \ =\ \sum_{k=0}^{n-1} 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2u_k} \ =\ n + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k},$$

et de la même manière

$$\sum_{k=0}^{n-1} 1 + \frac{e}{u_k} \ =\ n + e\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}.$$

En remplaçant on trouve que :

$$\boxed{n + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} \ \le u_n - 1 \ \le\ n + e\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}}.$$

Or, on a vu que $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} = \ln(u_n)$ en question 9–b), d'où

$$n + \frac{1}{2}\ln(u_n) \ \le\ u_n - 1 \ \le\ n + e\ln(u_n),$$

enfin en ajoutant $1-n$ à chaque membre on conclut que :

$$\boxed{1 + \frac{1}{2}\ln(u_n) \ \le\ u_n - n \ \le\ 1 + e\ln(u_n)}.$$

11. (a) On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissance comparée, d'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n} = 0}$.

(b) On divise l'encadrement de la question 10–b) par u_n :

$$\frac{1}{u_n} + \frac{1}{2}\frac{\ln(u_n)}{u_n} \le 1 - \frac{n}{u_n} \ \le \frac{1}{u_n} + e\frac{\ln(u_n)}{u_n},$$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = 0$, ainsi les membres de droite et de gauche tendent vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Par le théorème des gendarmes, il vient que $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \frac{n}{u_n} = 0$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{u_n} = 1$. Ceci montre que $\boxed{u_n \sim n \text{ lorsque } n \text{ tend vers } +\infty}$.

12. On sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} \ =\ \ln(u_n).$$

Par ailleurs, pour n voisin de $+\infty$, on a $u_n = n + o(n)$ d'après la question précédente, d'où

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} &= \ln(n + o(n)) \\
&= \ln\left(n \times (1 + o(1))\right) \\
&= \ln(n) + \ln(1 + o(1)) \\
&= \ln(n) + o\left(1\right) \quad (\text{car } \ln(1+o(1)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0)
\end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} \ \sim\ \ln(n) \text{ lorsque } n \text{ tend vers } +\infty}$.