Corrigé du Concours Blanc - V2

le 07/11/2025
Durée : 4h

— L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
— La clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une grande part dans la notation.
— Le résultat d'une question peut être admis afin de traiter une question suivante.
— On encadrera le résultat de chaque question.

Exercice 1 : d'après EDHEC E 2020

1. Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie pour tout réel $x \in [0;1]$ par

$$f_n(x) = \frac{x}{x+n}$$

La fonction f_n est un quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0;1]$, elle est donc dérivable sur ce même intervalle et, pour tout $x \in [0;1]$,

$$f_n'(x) = \frac{x+n-x}{(x+n)^2} = \frac{n}{(x+n)^2} > 0$$

ainsi la fonction est strictement croissante sur $[0;1]$. Comme $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = 1/(1+n)$, on peut dresser le tableau de variations suivant

x	0		1
$f_n'(x)$		$+$	
f_n	0	$\nearrow$	$\frac{1}{n+1}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, on a, pour tout $x \in [0;1]$,

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n+1}, \quad \text{et donc} \quad 0 \leq \frac{x}{n(x+n)} \leq \frac{1}{n(n+1)}.$$

Par positivité de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant, on a alors

$$0 \leq u_n \leq \int_0^1 \frac{1}{n(n+1)} \mathrm{d}x = \frac{1}{n(n+1)}$$

ce qui est bien l'encadrement demandé.

3. Il est immédiat de voir que $\dfrac{1}{n(n+1)} \sim \dfrac{1}{n^2}, \quad n \to +\infty.$

Or, la série de terme général $1/n^2$ est convergente (critère de Riemann). Par critère de comparaison par équivalence pour les séries à termes positifs, on peut donc affirmer que la série de terme général u_n est également convergente.

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

(a) La suite (S_n) représente la suite des sommes partielles de la série de terme général u_n que l'on sait être convergente par la question précédente. Par définition de la convergence d'une série, la suite (S_n) est bien convergente. On note γ sa limite.

(b) On voit en effet que, pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} \ .$$

Pour $n \geq 1$, $S_n \geq 0$ car c'est une somme de termes possitifs.
Par ailleurs,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \qquad \text{(par télescopage)} \ .$$

De plus, comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $u_n \leq \dfrac{1}{n(n+1)}$,

$$S_n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \ ;$$

et donc

$$S_n \leq 1 - \frac{1}{n+1} \leq 1 \ .$$

La suite (S_n) étant majorée par 1, minorée par 0 et convergente, sa limite vérifie aussi l'encadrement $0 \leq \gamma \leq 1$.

(c) On a

$$S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$$

et la suite (S_n) est bien croissante.

5. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. Observons que

$$\frac{a}{k} - \frac{b}{x+k} = \frac{ax + bk - ak}{k(x+k)}$$

Par principe d'identification, l'égalité voulue pour tout $x \in [0;1]$ donne

$$\begin{cases} a &= 1 \\ bk - ak &= 0 \end{cases} \iff a = b = 1.$$

Notons que ni a ni b ne dépend de k. On a bien, pour tout $x \in [0;1]$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{x}{k(x+k)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{x+k}.$$

Ceci permet de calculer u_k :

$$\begin{aligned} u_k &= \int_0^1 \frac{x}{k(x+k)} \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k} \right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{k} - \int_0^1 \frac{1}{x+k} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{k} - [\ln(x+k)]_0^1 \\ &= \frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k), \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule attendue.

(b) Il suit alors, par télescopage que

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \end{aligned}$$

6. (a) Commençons par voir que

$$T_n = S_n + \ln(n+1) - \ln(n) = S_n + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = S_n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Or, (S_n) est convergente (de limite γ) et on sait que

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \longrightarrow 0,\ n \to +\infty.$$

Par somme, (T_n) est convergente, de limite γ.

(b) Cet encadrement classique se montre de différentes façons. On propose ici d'utiliser une inégalité des accroissement finis.
Sur l'intervalle $[n; n+1]$, la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, sa dérivée est la fonction $x \mapsto 1/x$ qui est maximale en n et minimale en $n+1$. On a donc

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1}(n+1-n) \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}(n+1-n) = \frac{1}{n}.$$

Il suit de cet encadrement que

$$T_{n+1} - T_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \leq 0$$

et la suite (T_n) est bien décroissante.

(c) La suite (S_n) est croissante et converge vers γ ; on a donc pour tout n $S_n \leq \gamma$. De même, (T_n) est décroissante et converge aussi vers γ ce qui donne pour tout n $T_n \geq \gamma$. On peut alors écrire

$$S_n \leq \gamma \leq T_n.$$

7. (a) D'après les encadrement précédents, on peut écrire

$$0 \leq \gamma - S_n \leq T_n - S_n = \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}.$$

Il suit que S_n fournit une valeur approchée de γ à 10^{-3} près dès que $T_n - S_n$ est inférieur à 10^{-3}.

(b) Comme mentionné juste ci-dessus, comme

$$T_n - S_n = \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n},$$

il suffit que $1/n$ soit inférieur à 10^{-3} pour que S_n fournisse une valeur approchée de γ à $A0^{-3}$ près. On complète donc le script `SciLab` dans ce sens en calculant le terme S_n tant que $1/n > 10^{-3}$. **Attention**, dans chaque tour de boucle il faut rajouter la valeur de u_n et non pas simplement $1/n$, sinon l'initialisation $s = 1 - \ln(2)$ qui correspond à u_1 n'est pas compatible avec le reste du programme.

```
n = 1
s = 1 - np.log(2)
while 1/n > 10**(-3)
  n = n+1
  s = s + 1/n - np.log(n+1) + np.log(n)

print(s)
```

Exercice 2 : d'après EDHEC E 2020

1. Dans le cas où $n = 1$, X ne prend que la valeur 1. On pioche donc une boule dans l'urne V, boule qui a une probabilité p d'être blanche. Ainsi, Y prend la valeur 1 avec la probabilité p, et 0 avec la probabilité $1 - p$. Autrement dit, $\boxed{\text{lorsque } n = 1,\ Y \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } p}$.

2. Il y a une boule portant chaque numéro entre 1 et n. Chaque numéro a donc la même probabilité d'être tiré.
   Par conséquent, $\boxed{X \text{ suit une loi uniforme dans } [\![1;n]\!]}$.
   D'après le cours, on a alors $\boxed{E(X) = \dfrac{n+1}{2}}$ et $\boxed{V(X) = \dfrac{n^2-1}{12}}$.

3. Si l'événement $(X = k)$ est réalisé, alors on tire k boules dans l'urne V. Dans ce cas, la variable aléatoire Y compte donc le nombre de succès (tirer une boule blanche) à une succession de k épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, avec une probabilité de succès égale à p.
   Par conséquent, la loi de Y conditionnellement à l'événement $(X = k)$ est une loi binomiale $\mathcal{B}(k, p)$. Ainsi, pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a :
$$P_{(X=k)}(Y = i) = \begin{cases} \dbinom{k}{i} p^i q^{k-i} & \text{si } 0 \leqslant i \leqslant k \\ 0 & \text{si } i > k \end{cases}$$

4. Le programme complété est le suivant :

```
n = int(input('entrez la valeur de n :'))
p = float(input('entrez la valeur de p :'))
X = rd.randint(1,n+1)
Y = rd.binomial(X,p)
```

5. (a) Si l'événement $(X = k)$ est réalisé, alors Y peut prendre les valeurs de 0 à k. Or, X peut prendre les valeurs de 1 à n. Donc $Y(\Omega) = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} [\![0;k]\!]$, c'est-à-dire $\boxed{Y(\Omega) = [\![0;n]\!]}$.
   Ensuite, d'après la formule des probabilités totales, avec le système complet d'événements $\Big([X = k]\Big)_{1 \leqslant k \leqslant n}$, on a :
$$\begin{aligned} P(Y = 0) &= \sum_{k=1}^{n} P(X = k) P_{(X=k)}(Y = 0) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} P_{(X=k)}(Y = 0) \quad \text{(question 2)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} q^k \quad \text{(question 3)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} q^k \end{aligned}$$
   On reconnaît alors la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison q, avec $q \neq 1$. D'où
$$\boxed{P(Y = 0) = \frac{1}{n} \times \frac{q(1-q^n)}{1-q} = \frac{q(1-q^n)}{n(1-q)}}$$
   (b) Soit $i \in [\![1;n]\!]$ quelconque. On a de même, par la formule des probabilités totales, avec le système complet

d'événements $\Big([X=k]\Big)_{1\leqslant k\leqslant n}$:

$$\begin{aligned}P(Y=i) &= \sum_{k=1}^{n} P(X=k)P_{(X=k)}(Y=i)\\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}P_{(X=k)}(Y=i) \quad \text{(question 2)}\\ &= \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{n}P_{(X=k)}(Y=i) \quad \text{car } P_{(X=k)}(Y=i)=0 \text{ si } k<i \text{ (cf question 3) :}\end{aligned}$$

Ce qui donne, d'après la question 3 :

$$\boxed{P(Y=i) = \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{n}\binom{k}{i}p^i q^{k-i} = \frac{1}{n}\sum_{k=i}^{n}\binom{k}{i}p^i q^{k-i}}$$

6. (a) Soit i et k deux entiers naturels tels que $1\leqslant i\leqslant k\leqslant n$. On a alors :

$$\begin{aligned}i\binom{k}{i} &= i\frac{k!}{(k-i)!i!}\\ &= \frac{k!}{(k-i)!(i-1)!}\\ &= k\frac{(k-1)!}{(k-i)!(i-1)!}\\ &= k\frac{(k-1)!}{\Big((k-1)-(i-1)\Big)!(i-1)!}\end{aligned}$$

Ce qui donne bien : $\boxed{i\binom{k}{i} = k\binom{k-1}{i-1}}$.

(b) $\boxed{\text{La variable aléatoire } Y \text{ ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs. Elle admet donc une espérance.}}$
Ensuite, on a :

$$\begin{aligned}E(Y) &= \sum_{i=0}^{n} iP(Y=i) \quad \text{car } Y(\Omega)=[\![0;n]\!]\\ &= \sum_{i=1}^{n} iP(Y=i) \quad \text{(le terme pour } i=0 \text{ est nul)}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\sum_{k=i}^{n}\binom{k}{i}p^i q^{k-i}\right) \quad \text{(question 5.(b))}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(i\sum_{k=i}^{n}\binom{k}{i}p^i q^{k-i}\right)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n} i\binom{k}{i}p^i q^{k-i}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} i\binom{k}{i}p^i q^{k-i} \quad \text{(on permute les deux sommes, attention aux bornes !)}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} k\binom{k-1}{i-1}p^i q^{k-i} \quad \text{(question 6.(a))}\end{aligned}$$

Ce qui donne finalement :

$$\boxed{E(Y) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(k\sum_{i=1}^{k}\binom{k-1}{i-1}p^i q^{k-i}\right)}$$

(c) Soit $k \in [\![1;n]\!]$ quelconque. On commence par calculer la somme intérieure :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}\binom{k-1}{i-1}p^iq^{k-i} &= \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k-1}{j}p^{j+1}q^{k-1-j} \quad \text{(changement d'indice } j=i-1\text{)}\\ &= p\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k-1}{j}p^jq^{k-1-j}\\ &= p(p+q)^{k-1} \quad \text{(binôme de Newton)}\\ &= p\times 1^{k-1}\\ &= p\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}E(Y) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(kp)\\ &= \frac{p}{n}\sum_{k=1}^{n}k\\ &= \frac{p}{n}\times\frac{n(n+1)}{2}\end{aligned}$$

Ce qui donne finalement : $\boxed{E(Y) = \dfrac{(n+1)p}{2}}$.

7. (a) On procède comme aux questions 6.(a) et 6.(b). Soit i et k deux entiers naturels tels que $2 \leqslant i \leqslant k \leqslant n$. On a alors :

$$\begin{aligned}i(i-1)\binom{k}{i} &= i(i-1)\frac{k!}{(k-i)!i!}\\ &= \frac{k!}{(k-i)!(i-2)!}\\ &= k(k-1)\frac{(k-2)!}{(k-i)!(i-2)!}\\ &= k(k-1)\frac{(k-2)!}{\big((k-2)-(i-2)\big)!(i-2)!}\end{aligned}$$

Ce qui donne : $i(i-1)\binom{k}{i} = k(k-1)\binom{k-2}{i-2}$. Ensuite, pour tout $n \geqslant 2$, on a :

$$\begin{aligned}E(Y(Y-1)) &= \sum_{i=0}^{n} i(i-1)P(Y=i) \quad \text{(théorème du transfert)}\\ &= \sum_{i=2}^{n} i(i-1)P(Y=i) \quad \text{(les termes pour } i=0 \text{ et } i=1 \text{ sont nuls)}\\ &= \sum_{i=2}^{n}\left(\frac{i(i-1)}{n}\sum_{k=i}^{n}\binom{k}{i}p^iq^{k-i}\right) \quad \text{(question 5.(b))}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}\sum_{k=i}^{n} i(i-1)\binom{k}{i}p^iq^{k-i}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\sum_{i=2}^{k} i(i-1)\binom{k}{i}p^iq^{k-i} \quad \text{(on permute les deux sommes)}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\sum_{i=2}^{k} k(k-1)\binom{k-2}{i-2}p^iq^{k-i} \quad \text{(cf calcul ci-dessus)}\end{aligned}$$

Ce qui donne finalement :

$$\boxed{E(Y(Y-1)) = \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\left(k(k-1)\sum_{i=2}^{k}\binom{k-2}{i-2}p^i q^{k-i}\right)}$$

(b) On procède comme à la question 6.(c). On commence par simplifier la somme intérieure :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{k}\binom{k-2}{i-2}p^i q^{k-i} &= \sum_{j=0}^{k-2}\binom{k-2}{j}p^{j+2}q^{k-2-j} \quad \text{(changement d'indice } j=i-2\text{)}\\
&= p^2\sum_{j=0}^{k-2}\binom{k-2}{j}p^j q^{k-2-j}\\
&= p^2(p+q)^{k-2} \quad \text{(binôme de Newton)}\\
&= p^2\times 1^{k-2}\\
&= p^2
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
E(Y(Y-1)) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(k(k-1)p^2\right)\\
&= \frac{p^2}{n}\sum_{k=1}^{n}k(k-1)\\
&= \frac{p^2}{n}\sum_{k=1}^{n}(k^2-k)\\
&= \frac{p^2}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{p^2}{n}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}\right)\\
&= \frac{p^2}{n}\times\frac{n(n+1)(2n+1)-3n(n+1)}{6}\\
&= \frac{p^2}{n}\times\frac{n(n+1)\big((2n+1)-3\big)}{6}\\
&= \frac{p^2}{n}\times\frac{n(n+1)(2n-2)}{6}\\
&= \frac{p^2}{n}\times\frac{n(n+1)(n-1)}{3}\\
&= \frac{(n+1)(n-1)p^2}{3}
\end{aligned}$$

Ce qui donne bien : $\boxed{E(Y(Y-1)) = \frac{(n^2-1)p^2}{3}}$.

(c) Lorsque $n=1$, la variable aléatoire Y est à valeurs dans $\{0;1\}$, donc dans tous les cas $Y(Y-1)=0$. On en déduit que $E(Y(Y-1))=0$. Or, $\frac{(1^2-1)p^2}{3}=0$ également.

$\boxed{\text{Conclusion : l'expression obtenue à la question précédente reste valable lorsque } n=1.}$

(d) On a $E(Y(Y-1)) = E(Y^2-Y) = E(Y^2)-E(Y)$ par linéarité de l'espérance. On en déduit que $E(Y^2)=E(Y(Y-1))+E(Y)$, puis que $\boxed{V(Y)=E(Y(Y-1))+E(Y)-E(Y)^2}$.

Remarque : on peut ainsi calculer $V(Y)$ avec les résultats des questions 6.(c) et 7.(b). On trouve (après calculs) :

$$V(Y) = \frac{(np-7p+6)(n+1)p}{12}$$

Problème : d'après EDHEC E 2017

Partie 1 : étude d'une variable aléatoire

1. On a $X_1(\Omega) = \{2, 3, 4\}$ et $\forall k \in \{2, 3, 4\} \quad P(X_1 = k) = \dfrac{1}{3}$ par équiprobabilité des déplacements.
   X_1 suit une loi uniforme sur $\{2, 3, 4\}$, on a donc $E(X_1) = 3 \quad$ (milieu de $\{2, 3, 4\}$.
2. A priori, tous les points sont possibles à atteindre en n déplacements (sauf 1 pour $n = 1$). Prouvons rigoureusement par récurrence que $(H_n) \quad X_n(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$ pour $n \geq 2$.
   • Pour $n = 2$, d'après le résultat admis, on a $X_2(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$. Donc (H_2) est vrai.
   • Supposons (H_n) vrai, en n déplacements on peut donc être en $i \quad (i \in \{1, 2, 3, 4\}$, au n-ième déplacement, on sera alors en $j \in \{1, 2, 3, 4\} - \{i\}$. En envisageant deux valeurs distinctes de i, on obtient toutes les valeurs possibles dans $\{1, 2, 3, 4\}$. Donc (H_{n+1}) est vrai.
   Ce qui assure que (H_n) est vrai pour tout $n \geq 2$
   $\boxed{\forall n \geq 2 \quad X_n(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}}$
3. (a) Pour $n \geq 2$, on peut utiliser le système complet d'événements $(X_n = i)_{i \in [[1,4]]}$.
   La formule des probabilités totales donne :
   $P(X_{n+1} = 1) = \displaystyle\sum_{i=1}^{4} P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = 1)P(X_n = i)$
   Or $P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) = 0$ et $P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = i) = \dfrac{1}{3}$ si $i \neq 1$ donc pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :
   $$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3}\left(P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4)\right)$$
   (b) Pour $n = 0$, $P(X_1 = 1) = 0 \quad$ et $\dfrac{1}{3}\left(P(X_0 = 2) + P(X_0 = 3) + P(X_0 = 4)\right) = \dfrac{1}{3}\ (0 + 0 = 0) = 0$, donc la relation est encore vraie.
   Pour $n = 1$, $P(X_2 = 1) = \dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{1}{3}\left(P(X_1 = 2) + P(X_1 = 3) + P(X_1 = 4)\right) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{3}$
   La relation est donc encore vraie pour $n = 1$.
   (c) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $P(X_n = 1) + P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4) = 1$ car c'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$ et vraie aussi pour $n \geq 2$ car $(X_n = i)_{i \in [[1,4]]}$ est un système complet d'événements.
   $P(X_{n+1} = 1) = \dfrac{1}{3}\left(1 - P(X_n = 1)\right) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}P(X_n = 1) \quad$ ce qui est la relation cherchée.
   (d) Posons $v_n = P(X_n = 1)$. (v_n) vérifie $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad (1)\ v_{n+1} = -\dfrac{1}{3}v_n + \dfrac{1}{3}$
   C'est une suite arithmético géométrique. Cherchons un point fixe α. (2) $\alpha = -\dfrac{1}{3}\alpha + \dfrac{1}{3}$
   (2) donne $\dfrac{4}{3}\alpha = \dfrac{1}{3}$ donc $\alpha = \dfrac{1}{4}$
   En faisant (1) − (2) on obtient $v_{n+1} - \alpha = -\dfrac{1}{3}(v_n - \alpha)$ donc
   $v_n - \alpha = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n (v_0 - \alpha) = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n \left(1 - \dfrac{1}{4}\right)) = \dfrac{3}{4}\ \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$
   On a bien : $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad P(X_n = 1) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.
4. (a) Pour $n \geq 2$, on peut utiliser le système complet d'événements $(X_n = i)_{i \in [[1,4]]}$.
   La formule des probabilités totales donne :
   $P(X_{n+1} = 2) = \displaystyle\sum_{i=1}^{4} P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = 2)P(X_n = i)$
   Or $P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 2) = 0$ et $P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = i) = \dfrac{1}{3}$ si $i \neq 2$ donc pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :
   $$P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{3}\left(P(X_n = 1) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4)\right)$$
   Pour $n = 0$, $P(X_1 = 2) = \dfrac{1}{3} \quad$ et $\dfrac{1}{3}\left(P(X_0 = 1) + P(X_0 = 3) + P(X_0 = 4)\right) = \dfrac{1}{3}\ (1 + 0 = 0) = 0$, donc la relation est encore vraie.

Pour $n=1$, $P(X_2=1)=\frac{2}{9}$ et $\frac{1}{3}\left(P(X_1=1)+P(X_1=3)+P(X_1=4)\right)=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{9}$
La relation est donc encore vraie pour $n=1$.En procédant de la même façon qu'à la question précédente, montrer que l'on a :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad P(X_{n+1}=2)=\frac{1}{3}\left(P(X_n=1)+P(X_n=3)+P(X_n=4)\right)$$

(b) $P(X_{n+1}=2)=\frac{1}{3}\left(1-P(X_n=2)\right)=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}P(X_n=2)$.

(c) Posons $w_n=P(X_n=2)$. (v_n) vérifie $w_0=0$ et $\forall n\in\mathbb{N}\quad (1)\ w_{n+1}=-\frac{1}{3}w_n+\frac{1}{3}$

C'est une suite arithmético géométrique. On a le même point fixe que pour v_n : $\alpha=\frac{1}{4}$

(2) donne $\frac{4}{3}\alpha=\frac{1}{3}$ donc $\alpha=\frac{1}{4}$

En faisant $(1)-(2)$ on obtient $w_{n+1}-\alpha=-\frac{1}{3}(w_n-\alpha)$ donc

$w_n-\alpha=\left(-\frac{1}{3}\right)^n(w_0-\alpha)=\left(-\frac{1}{3}\right)^n\left(-\frac{1}{4}\right))=-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$

On a bien : $\qquad\forall n\in\mathbb{N}\quad P(X_n=2)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

5. On admet que, pour tout entier naturel n, on a :

$$P(X_{n+1}=3)=-\frac{1}{3}P(X_n=3)+\frac{1}{3}\qquad\text{et}\qquad P(X_{n+1}=4)=-\frac{1}{3}P(X_n=4)+\frac{1}{3}$$

Les suites définies par $P(X_n=3)$ et $P(X_n=4)$ ont la même relation de récurrence que $P(X_n=2)$ et la même valeur initiale 0. On a donc : $\quad\forall n\in\mathbb{N}P(X_n=3)=P(X_n=4)=P(X_n=2)$ d'où :

$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad P(X_n=3)=P(X_n=4)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

6. $E(X_n)=P(X_n=1)+2P(X_n=2)+3P(X_n=3)+4P(X_n=4)=\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}+\frac{4}{4}+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{4}-\frac{3}{4}-\frac{4}{4}\right)$

$E(X_n)=\frac{10}{4}-\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

On peut vérifier : avec $n=0$ on obtient bien $E(X_0)=1$, avec $n=1$, on obtient bien $E(X_1)=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=3$

$$\boxed{\forall n\in N\qquad E(X_n)=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$$

Partie 2 : étude des puissances d'une matrice A

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on considère la matrice-ligne de $\mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R})$:

$$U_n=\begin{pmatrix}P(X_n=1) & P(X_n=2) & P(X_n=3) & P(X_n=4)\end{pmatrix}$$

1. (a) On utilise les 4 égalités obtenues en I 3) a, 4) a , que l'on peut réécrire également pour $i=3$ et $i=4$.

$$\begin{cases} P(X_{n+1}=1) &= \frac{1}{3}\left(0.P(X_n=1)+1.P(X_n=2)+1.P(X_n=3)+1.P(X_n=4)\right)\\ P(X_{n+1}=1) &= \frac{1}{3}\left(1.P(X_n=1)+0.P(X_n=2)+1.P(X_n=3)+1.P(X_n=4)\right)\\ P(X_{n+1}=1) &= \frac{1}{3}\left(1.P(X_n=1)+1.P(X_n=2)+0.P(X_n=3)+1.P(X_n=4)\right)\\ P(X_{n+1}=1) &= \frac{1}{3}\left(1.P(X_n=1)+1.P(X_n=2)+1.P(X_n=3)+0.P(X_n=4)\right)\end{cases}$$

Donc $U_nA=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}P(X_n=1) & P(X_n=2) & P(X_n=3) & P(X_n=4)\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}=U_{n+1}$

On a bien : $\qquad U_{n+1}=U_n\ A$

(b) Posons $(H_n) \quad U_n = U_0\ A^n$ pour$n \in \mathbb{N}$.
• Pour $n = 0$, $A^0 = I_4$ et $U_0 A^n = U_0$ donc (H_0) est vrai.
• Supposons (H_n) vérifié pour $n \in \mathbb{N}$.
$U_{n+1} = U_n A = (U_0\ A^n) \times A = U_0(A^n \times A) = U_0 A^{n+1}$
Donc (H_{n+1}) est vrai.
Donc (H_n) est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) Si $M \in \mathcal{M}_{4,4}(\mathbb{R})$, le produit $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \times M$ donne la première ligne de la matrice M. Donc la première ligne de la matrice A^n est $U_0\ A^n$, c'est à dire U_n.
La première ligne de A^n est U_n, c'est à dire :
$$\boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n & \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}}$$

2. En multipliant à gauche une matrice M par $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, on obtient la deuxième ligne de M.
Donc en choisissant comme position initiale au départ $X_0 = 2$, et en recommençant la même méthode probabiliste, on obtiendrait la deuxième ligne de A^n. Avec $X_0 = 3$, on obtiendrait la 3-ième ligne, et $X_0 = 4$, la 4-ième ligne.

Partie 3 : une deuxième méthode de calcul des puissances de A

1. $aI + bJ = \begin{pmatrix} a+b & b & b & b & \\ b & a+b & b & b & b \\ b & b & a+b & b & \\ b & b & b & a+b & \end{pmatrix}$

Donc $aI + bJ = A \iff \begin{cases} a+b & = 0 \\ b & = \dfrac{1}{3} \end{cases} \iff a = -\dfrac{1}{3}$ et $b = \dfrac{1}{3}$

2. (a) $J^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} = 4J$.
Posons $(G_k) \quad J^k = 4^{k-1} J$.
• Pour $k = 1$, (G_1) est vrai de façon évidente.
• Supposons (G_k) vrai pour $k \geq 1$, alors $J^{k+1} = J \times J^k = J \times \left(4^{k-1} J\right) = 4^{k-1} J^2 = 4^k J$
Donc (G_{k+1}) est vrai.
Donc (G_k) est vrai pour tout $k \geq 1$.

(b) $A^n = \left(\dfrac{1}{3}(J - I)\right)^n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n (J - I)^n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k (-I)^{n-k}$.

$A^n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n \left((-1)^n I + \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 4^{k-1} \right) J \right)$

Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 4^{k-1} = \dfrac{1}{4} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 4^{k} = \dfrac{1}{4} \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 4^{k} - (-1)^n \right)$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 4^{k-1} = \dfrac{1}{4} \left(3^n - (-1)^n\right)$

On a donc : $\quad A^n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n \left((-1)^n I + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n \times \dfrac{1}{4} \left(3^n - (-1)^n\right) \right) J$

$$\boxed{A^n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n I + \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) J}$$

(c) Pour $n = 0$, $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n I + \dfrac{1}{4}\left(1 - \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\right) J = I + \dfrac{1}{4}(1 - 1) J = I$ .... La formule est valable pour $n = 0$.