

DS n°5

le 21/11/2025

Durée : 4h

- L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
- La clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une grande part dans la notation.
- Le résultat d'une question peut être admis afin de traiter une question suivante.
- On encadrera le résultat de chaque question.

Exercice 1

1. (a) On a

$$\begin{aligned}
 F &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\
 &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\
 &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)
 \end{aligned}$$

Donc F est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$.(b) La question précédente fournit une famille génératrice de F . Montrons que cette famille est libre.Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0_2$.On a alors $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;donc $a = b = c = 0$.

Ainsi cette famille est libre.

Conclusion : la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de F et donc F est de dimension 3.(c) Remarquons tout d'abord que ces deux matrices sont bien des éléments de F : la première est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix}$ avec $a = 1$, $b = 1$ et $c = 1$; et la seconde avec $a = 2$, $b = 1$ et $c = -1$.Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 0_2$.

$$\text{On a alors } \begin{cases} \lambda + 2\mu = 0 \\ \lambda + \mu = 0 \\ -\lambda - \mu = 0 \\ \lambda - \mu = 0 \end{cases}.$$

En faisant $L_2 - L_1$, on obtient $\lambda = 0$; puis $\mu = 0$.Conclusion : la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille libre d'éléments de F .(d) Comme la famille de la question précédente a deux éléments et F est de dimension 3, elle n'est pas une famille génératrice d'éléments de F .2. (a) — On a $A0_{3,1} = 0_{3,1}$, donc $0_{3,1} \in E$.— Soit $(X_1, X_2) \in E^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.On a $A(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) = \lambda_1 A X_1 + \lambda_2 A X_2$.Or $A X_1 = 0_{3,1}$ et $A X_2 = 0_{3,1}$ car X_1 et X_2 sont des éléments de E .Donc $A(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) = \lambda_1 0_{3,1} + \lambda_2 0_{3,1} = 0_{3,1}$.Donc $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 \in E$.Ainsi E est stable par combinaisons linéaires.Conclusion : E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(b) On a :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E &\iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x - 2y + 4z = 0 \\ 3x - 3y + 6z = 0 \end{cases} \\ &\iff x - y + 2z = 0 \\ &\iff x = y - 2z \end{aligned}$$

Ainsi

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} y - 2z \\ y \\ z \end{pmatrix}, (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

On en déduit que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de E .

Comme de plus il s'agit d'une famille libre (deux vecteurs non colinéaires), on en conclut qu'il s'agit d'une base de E .

(c) Comme E a une base comportant 2 éléments, E est de dimension 2.

(d) On a $A \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc ces deux vecteurs sont bien des éléments de E .

Comme E est de dimension 2, il suffit de montrer que ces deux vecteurs forment une famille libre pour montrer qu'ils forment une base de E . C'est le cas car ils ne sont pas colinéaires.

Conclusion : les vecteurs $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base de E .

Exercice 2

1. on vérifie les critères :

- $E_1(A) \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
- Comme $A0_3 = 0_3$ alors $0_3 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
- Si M et N sont deux matrices de $E_1(A)$ et α et β deux réels alors $\alpha M + \beta N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $A(\alpha M + \beta N) = \alpha AM + \beta AN = \alpha M + \beta N$ car M et N sont dans $E_1(A)$ Donc $\alpha M + \beta N \in E_1(A)$

Donc $E_1(A)$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On admet que $E_2(A)$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

2. (a) Pour montrer l'inclusion on montre que **si** $M \in E_1(A)$ **alors** $M \in E_2(A)$:

Si $M \in E_1(A)$ alors $AM = M$ donc $A^2M = A(AM) = AM$ et donc $M \in E_2(A)$ (on avait aussi $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$)

(b) Si A est inversible, pour montrer l'égalité des deux ensembles, on doit montrer l'inclusion réciproque :

Si $M \in E_2(A)$ alors $A^2M = AM$ et $A^{-1}A^2M = A^{-1}AM$ d'où $AM = M$

Alors $M \in E_1(A)$

Donc $E_2(A) \subset E_1(A)$ et finalement $E_1(A) = E_2(A)$

3. Supposons $A - I$ inversible.

On sait déjà que $0_3 \in E_1(A)$.

si $M \in E_1(A)$ alors $AM = M$ d'où $AM - M = 0_3$ et $(A - I)M = 0_3$

et, comme $A - I$ est inversible, **alors** $M = 0_3$

Donc $E_1(A) = \{0_3\}$ si $A - I$ est inversible.

4. Comme $B - I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est triangulaire à coefficients diagonaux non nuls, elle est inversible.

Donc $E_1(B) = \{0_3\}$.

Comme B est diagonale à coefficients diagonaux non nuls, B est inversible donc $E_2(B) = E_1(B) = \{0_3\}$.

Leur dimension commune est 0

5. Prenons $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Remarquons que D^2 n'est pas inversible (Ce qui rend possible le fait que $E_2(D) \neq E_1(D)$).

On a $D - I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Donc $D - I_3$ est inversible ; donc $E_1(D) = \{0_3\}$.

Déterminons $E_2(D)$. On a $D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in E_2(D) &\iff D^2 M = D M \\ &\iff \begin{pmatrix} a & b & c \\ 4d & 4e & 4f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff a = b = c = d = e = f = 0 \end{aligned}$$

Donc $E_2(D)$ est engendré par $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On en conclut que $E_2(D) \neq E_1(D)$.

Exercice 3 :

1. (a) $S(\Omega) = \{0, \dots, 4\}$.

$$P(S=0) = P((X=0) \cap (Y=0)) = P(X=0) \times P(Y=0) = \frac{1}{16} \quad \text{par indépendance des variables } X \text{ et } Y$$

$$\begin{aligned} P(S=1) &= P([(X=0) \cap (Y=1)] \cup [(X=1) \cap (Y=0)]) \\ &= P(X=0) \times P(Y=1) + P(X=1) \times P(Y=0) \\ &= \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(S=2) &= P([(X=0) \cap (Y=2)] \cup [(X=2) \cap (Y=0)] \cup [(X=1) \cap (Y=1)]) \\ &= P(X=0) \times P(Y=2) + P(X=2) \times P(Y=0) + P(X=1) \times P(Y=1) \\ &= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \\ &= \frac{5}{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(S=3) &= P([(X=1) \cap (Y=2)] \cup [(X=2) \cap (Y=1)]) \\ &= P(X=1) \times P(Y=2) + P(X=2) \times P(Y=1) \\ &= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$P(S = 4) = P((X = 2) \cap (Y = 2)) = P(X = 2) \times P(Y = 2) = \frac{1}{4}$$

Bilan :

i	0	1	2	3	4
$P(S = i)$	1/16	1/8	5/16	1/4	1/4

(b) S est une variable discrète finie donc elle admet une espérance et

$$E(S) = \sum_{k=0}^4 kP(S = k) = \frac{1}{8} + \frac{5}{8} + \frac{3}{4} + 1 ;$$

$$\boxed{E(S) = \frac{5}{2}}.$$

(c) On sait aussi que $S = X + Y$ donc par linéarité $E(S) = E(X) + E(Y) = 2 \times \left(0 + \frac{1}{4} + 1\right) = \frac{5}{2}$.

2. (a) $T(\Omega) = \{0, 1, 2, 4\}$.

(b) $(T = 0) = (X = 0) \cup (Y = 0)$ Attention, ici les événements ne sont pas incompatibles !

$$P(T = 0) = P(X = 0) + P(Y = 0) - P((X = 0) \cap (Y = 0)) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{16}$$

$$P(T = 0) = \frac{7}{16}.$$

$$P(T = 1) = P((X = 1) \cap (Y = 1)) = P(X = 1) \times P(Y = 1) = \frac{1}{16}.$$

$$\begin{aligned} P(T = 2) &= P([(X = 1) \cap (Y = 2)] \cup [(X = 2) \cap (Y = 1)]) \\ &= P(X = 1) \times P(Y = 2) + P(X = 2) \times P(Y = 1) \\ &= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$P(T = 4) = P((X = 2) \cap (Y = 2)) = P(X = 2) \times P(Y = 2) = \frac{1}{4}.$$

Bilan :

j	0	1	2	4
$P(T = j)$	7/16	1/16	1/4	1/4

(c) T est une variable discrète finie donc elle admet une espérance et

$$E(T) = \frac{1}{16} + \frac{1}{2} + 1, \quad \boxed{E(T) = \frac{25}{16}}.$$

(d) On sait aussi que $T = XY$ donc par indépendance des variables X et Y ,

$$E(T) = E(X) \times E(Y) = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}.$$

3. Loi du couple (S, T) .

$$\forall (i, j) \in \{0, \dots, 4\} \times \{0, 1, 2, 4\}, P((S = i) \cap (T = j))$$

$i \setminus j$	0	1	2	4	$P(S = i)$
0	1/16	0	0	0	1/16
1	1/8	0	0	0	1/8
2	1/4	1/16	0	0	5/16
3	0	0	1/4	0	1/4
4	0	0	0	1/4	1/4
$P(T = j)$	7/16	1/16	1/4	1/4	

4. $P((S = 4) \cap (T = 0)) = 0$ et $P(S = 4) \times P(T = 0) \neq 0$ donc les variables ne sont pas indépendantes.

5. $E(ST) = 2 \times 1 \times \frac{1}{16} + 3 \times 2 \times \frac{1}{4} + 4 \times 4 \times \frac{1}{4},$

$$E(ST) = \frac{45}{8}.$$

$$\text{Cov}(S, T) = E(ST) - E(S)E(T) = \frac{45}{8} - \frac{5}{2} \times \frac{25}{16},$$

$$\text{Cov}(S, T) = \frac{55}{32}.$$

Exercice 4

Partie I : Étude d'une première variable aléatoire

1. (a) Notons, pour tout $i \in \mathbb{N}$, P_i l'événement : " Obtenir pile au i -ème lancer " et $F_i = \overline{P_i}$. On a alors

$$(X = 0) = P_1 \cap P_2$$

$$(X = 1) = (P_1 \cap F_2 \cap P_3) \cup (F_1 \cap P_2 \cap P_3)$$

$$(X = 2) = (P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4).$$

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(X = n)$ signifie que l'on a obtenu n Face et deux Pile, le second au $(n+2)$ -ème lancer et le premier à l'un des $(n+1)$ rangs précédents. On obtient donc

$$P(X = 0) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9},$$

$$P(X = 1) = 2 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{27},$$

$$P(X = 2) = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}.$$

(b) Comme observé à la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(X = n)$ signifie que l'on a obtenu n Face et deux Pile, le second au $(n+2)$ -ème lancer, le premier à l'un des $(n+1)$ rangs précédents. Formellement :

$$(X = n) = \left[\bigcup_{i=1}^{n+1} \left(P_i \cap \left(\bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} F_j \right) \right) \right] \cap P_{n+2}.$$

Par incompatibilité et par indépendance des lancers, il vient

$$\begin{aligned} P(X = n) &= \left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \right) \times \frac{2}{3} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{4}{3^{n+2}} \\ &= (n+1) \frac{4}{3^{n+2}}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X = n) = (n+1) \frac{4}{3^{n+2}}.$$

Partie II : Étude d'une expérience en deux étapes

1. (a) U prend clairement des valeurs entières positives et, pour chaque entier n , il existe une suite de tirages amenant à n Face et 2 Pile suivi d'un tirage de la boule numérotée n . Autrement dit,

$$U(\Omega) = \mathbb{N}.$$

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Sachant $(X = n)$, l'urne est composée de $(n+1)$ boules indiscernables au toucher numérotées de 0 à n donc conditionnellement à cet événement, U suit une loi uniforme sur $[[0, n]]$
- (c) Soit $k \in \mathbb{N}$. On commence par observer que $(U = k) \cap (X = n) = \emptyset$ si $n < k$ car on ne peut pas tirer une boule numérotée k dans une urne contenant des boules numérotées de 0 à n si $k > n$. Ainsi en appliquant la formule des probabilités totales relativement au système complet d'événements $\{(X = n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 P(U = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(U = k, X = n) \\
 &= \sum_{n=k}^{+\infty} P(U = k, X = n) \\
 &= \sum_{n=k}^{+\infty} P_{(X=n)} U = k P(X = n) \\
 &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} P(X = n) \quad (\text{d'après } \mathbf{2.b}),
 \end{aligned}$$

ce qui établit la première égalité.

En injectant le résultat trouvé en **1.b**, il vient

$$\begin{aligned}
 P(U = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \times (n+1) \frac{4}{3^{n+2}} \\
 &= 4 \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+2}} \\
 &= 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+k+2}} \\
 &= \frac{4}{3^{k+2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} \\
 &= \frac{4}{3^{k+2}} \times \frac{1}{1 - 1/3} \\
 &= \frac{4}{3^{k+2}} \times \frac{3}{2}.
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(U = k) = \frac{2}{3^{k+1}}.$$

- (d) U admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k \geq 0} kP(U = k)$ converge absolument. Les valeurs prises par U étant positives, ceci équivaut à la convergence de la série. Or,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k \geq 0} kP(U = k) &= \sum_{k \geq 0} k \frac{2}{3^{k+1}} \\
 &= \sum_{k \geq 1} k \frac{2}{3^{k+1}} \\
 &= \frac{2}{9} \sum_{k \geq 1} k \frac{1}{3^{k-1}} \\
 &= \frac{2}{9} \sum_{k \geq 1} k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}.
 \end{aligned}$$

On reconnaît le terme général d'une série géométrique dérivée de raison $1/3$. La série converge donc et

alors

$$\begin{aligned}
 E(U) &= \sum_{k=0}^{+\infty} kP(U = k) \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} k \frac{2}{3^{k+1}} \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{2}{3^{k+1}} \\
 &= \frac{2}{9} \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{1}{3^{k-1}} \\
 &= \frac{2}{9} \times \frac{1}{(1 - 1/3)^2} \\
 &= \frac{2}{9} \times \frac{9}{4} \\
 &= \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$E(U) = \frac{1}{2}.$$

Pour déterminer la variance, on commence par étudier l'espérance de $U(U - 1)$. On a

$$\begin{aligned}
 \sum_{k \geq 0} k(k - 1)P(U = k) &= \sum_{k \geq 2} k(k - 1) \frac{2}{3^{k+1}} \\
 &= \frac{2}{27} \sum_{k \geq 2} k(k - 1) \left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}.
 \end{aligned}$$

On reconnaît une série géométrique dérivée deux fois de raison $1/3$, il s'agit donc d'une série convergente, et plus précisément absolument convergente puisque ses termes sont positifs. Il suit donc du théorème de transfert que $U(U - 1)$ admet une espérance et

$$\begin{aligned}
 E(U(U - 1)) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k(k - 1)P(U = k) \\
 &= \frac{2}{27} \sum_{k=2}^{+\infty} k(k - 1) \left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} \\
 &= \frac{2}{27} \times \frac{2}{(1 - 1/3)^3} \\
 &= \frac{2}{27} \times \frac{2 \times 27}{8} \\
 &= \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Mais alors $U^2 = U^2 - U + U = U(U - 1) + U$ admet une espérance comme somme de variables aléatoires admettant une espérance et

$$E(U^2) = E(U(U - 1)) + E(U) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Il suit alors de la formule de Koenig-Huygens que :

$$VAR(U) = E(U^2) - E(U)^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

2. (a) V prend clairement des valeurs entières positives ou nulles et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un tirage amenant à n Face et deux Pile suivi d'un tirage de la boule 0, auquel cas ($V = n$) est réalisé. Ainsi,

$$V(\Omega) = \mathbb{N}.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Sachant $[X = n]$, V prend ses valeurs entre 0 et n et, pour tout $k \in [[0, n]]$, on a

$$\begin{aligned} P_{(X=n)}V = k &= P_{(X=n)}X - U = k \\ &= P_{(X=n)}U = n - k \\ &= \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Ainsi, la loi conditionnelle de V sachant $[X = n]$ est la loi uniforme sur $[[0, n]]$.

(c) En reprenant les calculs effectués en **2.b**, on observe que la loi de V est la même que celle de U . Autrement dit,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(V = k) = \frac{2}{3^{k+1}}.$$

3. Soient $k, \ell \in \mathbb{N}$. On a

$$(U = k, V = \ell) = (U = k, X - U = \ell) = (U = k, X = k + \ell).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} P(U = k, V = \ell) &= P(U = k, X = k + \ell) \\ &= P_{(X=k+\ell)}(U = k) \times P(X = k + \ell) \\ &= \frac{1}{k + \ell + 1} \times (k + \ell + 1) \frac{4}{3^{k+\ell+2}} \\ &= \frac{4}{3^{k+\ell+2}} \\ &= \frac{2}{3^{k+1}} \times \frac{2}{3^{\ell+1}} \\ &= P(U = k)P(V = \ell). \end{aligned}$$

Ainsi, U et V sont indépendantes.

4. U et V étant indépendantes d'après **4**, il vient

$$\text{Cov}(U, V) = 0.$$

Alors

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, U) &= \text{Cov}(V + U, U) \\ &= \text{Cov}(V, U) + \text{Cov}(U, U) \\ &= 0 + \text{VAR}(U) \\ &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\text{Cov}(X, U) = \frac{3}{4}.$$

Partie III : Étude d'un jeu

1. Simulation informatique

(a) On propose la fonction suivante :

```
1. def mystere(p):
2.     nPile = 0
3.     nFace = 0
4.     while nPile < 2:
5.         if rd.random() < 2/3:
6.             nPile = nPile + 1
7.         else :
8.             nFace = nFace + 1
9.     return nFace
```

- (b) La fonction proposée dans l'énoncé calcule la fréquence, sur 10 000 simulations, des victoires de A .
- (c) On observe que pour $p \simeq 0,8$, on obtient une fréquence de victoires de A approximativement égale à 50%. Ainsi : Le jeu est équilibré pour $p \simeq 0,8$.

2. Étude de la variable aléatoire Y

- (a) Z compte le rang du premier succès ("obtenir Pile") dans une suite infinie de répétitions d'expériences de Bernoulli indépendantes (lancer la pièce), de même paramètre (p , la probabilité de faire Pile). Ainsi, Z suit une loi géométrique de paramètre p .
- (b) Y étant le nombre de Face obtenus jusqu'au premier Pile, on a la relation $Y = Z - 1$. Il s'ensuit que Y admet une espérance et une variance et que

$$E(Y) = E(Z - 1) = E(Z) - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p}$$

et

$$VAR(Y) = VAR(Z - 1) = VAR(Z) = \frac{1-p}{p^2}.$$

- (c) Posons $q = 1 - p$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} P(Y \geq n) &= P(Z - 1 \geq n) \\ &= P(Z \geq n + 1) \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(Z = k) \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} pq^{k-1} \\ &= pq^n \sum_{k=n+1}^{+\infty} q^{k-(n+1)} \\ &= pq^n \sum_{k=0}^{+\infty} q^k \\ &= pq^n \times \frac{1}{1-q} \\ &= q^n. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(Y \geq n) = (1-p)^n.$$

3. (a) En appliquant la formule des probabilités totales relativement au système complet d'événements $\{(X = n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, on a

$$\begin{aligned} P(X \leq Y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n, X \leq Y) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n, Y \geq n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)P(Y \geq n) \quad (\text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$P(X \leq Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)P(Y \geq n).$$

(b) En injectant les résultats établis en **1.b** et **7.c** dans la formule trouvée en **8.a**, on a :

$$\begin{aligned}
 P(X \leq Y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)(Y \geq n) \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \frac{4}{3^{n+2}} q^n \\
 &= \frac{4}{9} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \left(\frac{q}{3}\right)^n \\
 &= \frac{4}{9} \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{q}{3}\right)^{n-1} \\
 &= \frac{4}{9} \times \frac{1}{(1 - q/3)^2} \\
 &= \frac{4}{9} \times \left(\frac{3}{3-q}\right)^2 \\
 &= \frac{4}{(3-q)^2} \\
 &= \frac{4}{(2+p)^2}.
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$P(X \leq Y) = \frac{4}{(2+p)^2}.$$

(c) Le jeu est équilibré quand $P(X \leq Y) = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire quand $\frac{4}{(2+p)^2} = \frac{1}{2}$. Or

$$\begin{aligned}
 \frac{4}{(2+p)^2} = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow 8 = (2+p)^2 \\
 &\Leftrightarrow p^2 + 4p - 4 = 0 \\
 &\Leftrightarrow p \text{ est racine de } X^2 + 4X - 4 \\
 &\Leftrightarrow p \in \{-2 - 2\sqrt{2}, -2 + 2\sqrt{2}\}.
 \end{aligned}$$

Mais $-2-2\sqrt{2} < 0$ et $-2+2\sqrt{2} > 0$ et p est nécessairement positif. Ainsi, Le jeu est équitable pour $p = 2\sqrt{2} - 2$.

Remarque : On a $\sqrt{2} \simeq 1,41$ donc $2\sqrt{2} - 2 \simeq 0,82$, ce qui est cohérent avec la réponse déterminée numériquement à la question **6.c**.