DM n°2

À rendre le 04/11/2024

Exercice 1

Cet exercice est composé de deux parties.

La partie **I** consiste à calculer en fonction de n les termes d'une suite récurrente $(u_n)_{n\geq 1}$.

La partie **II** étudie l'obtention du premier double PILE lors de lancers d'une pièce déséquilibrée.

Les résultats de la partie **I** peuvent être utilisés librement dans la partie **II**.

Partie I : Étude d'une suite.

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : $u_1 = 0$, $u_2 = \frac{4}{9}$, et, $\forall n \geq 1$, $u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{9}u_n$.
On considère également les quatre matrices carrées d'ordre 2 définies par:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad D = QAP$$

ainsi que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, les matrices colonnes: $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ et $Y_n = QX_n$.

1. Vérifier que les matrices PQ et D sont diagonales (les calculs devront être inscrits sur la copie).
2. En déduire que P est inversible et expliciter P^{-1}.
3. Soit $n \geq 1$. Donner, en la justifiant, la relation liant X_{n+1}, A et X_n.
   Prouver que $PY_n = X_n$. En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $Y_{n+1} = DY_n$.
4. Prouver que: $\forall n \geq 1, \quad Y_n = D^{n-1}Y_1$.
5. Calculer Y_1 et expliciter les coefficients de la matrice colonne Y_n.
6. En déduire que:
$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \frac{4}{9}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right].$$

Partie II : Probabilités discrètes.

On effectue des lancers successifs et indépendants d'une pièce de monnaie pour laquelle la probabilité d'obtenir PILE vaut $\frac{2}{3}$.

On suppose donnée un espace probabilisé muni d'une probabilité P modélisant cette expérience.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dit qu'il y a apparition d'un double PILE au rang n si on obtient PILE au $(n-1)$-ième lancer et PILE au n-ième lancer.

On note:

- pour tout entier $n \geq 1$, F_n l'événement "on obtient FACE au n-ième lancer" ;
- pour tout entier $n \geq 2$, D_n l'événement " on obtient un double PILE au rang n **pour la première fois**" ;
- pour tout entier $n \geq 2$, $v_n = P(D_n)$. On conviendra que $v_1 = 0$.

Par exemple, si les lancers donnent successivement:

"PILE, FACE, FACE, FACE, PILE, FACE, PILE, PILE"

alors l'événement D_8 est réalisé.

1. On cherche tout d'abord à simuler cette expérience aléatoire.

   (a) On suppose le module random importé par la commande `import random as rd`.
   Compléter la fonction suivante afin qu'elle renvoie le résultat de la simulation d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p.

```
def Ber(p):
    tir=rd.random()
    if tir ...  :
        X = 1
    else :
        X = ...
    return X
```

(b) Compléter la suite d'instructions suivante afin que son exécution simule des épreuves de Bernoulli répétées indépendantes et affiche les rangs $n-1$ et n auxquels apparaît la première répétition Pile-Pile (ceci dans le contexte de l'exercice, c'est à dire avec $p = 2/3$).
On rappelle que le symbole "`|`" signifie "ou".

```
p = 2/3 # Probabilité d'obtenir pile à chaque lancer
a = Ber(p) #premier tirage :
b = Ber(p) # deuxième tirage
n=2 # nombre de tirages effectués
# Tout au long de la boucle qui suit,
# a vaut 1 si le tirage n-1 a donné Pile et
#  b vaut 1 si le tirage n a donné Pile
while a == ... or  b == ... :
    n = ...
    a = ...
    b = ...

print( "rangs auxquels est apparu le premier double pile : ")
print ([...,...] )
```

2. Calculer v_2 et v_3. Vérifier que: $v_3 = \frac{1}{3}v_2 + \frac{2}{9}v_1$ (Rappelons que l'on a convenu que $v_1 = 0$).

3. Soit $n \geq 2$. On suppose qu'au premier lancer, PILE est obtenu et on souhaite la réalisation de l'événement D_{n+2}.

   Quel est alors le résultat du second lancer? À l'issue de ces deux premiers lancers, combien de lancers reste-t-il à effectuer pour que D_{n+2} puisse se réaliser?

   En déduire que:
$$P_{\overline{F_1}}(D_{n+2}) = \frac{1}{3}v_n.$$

4. Pour $n \geq 2$, justifier que:
$$P_{F_1}(D_{n+2}) = v_{n+1}.$$

5. À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que:
$$\forall n \geq 2, \quad v_{n+2} = \frac{1}{3}v_{n+1} + \frac{2}{9}v_n.$$

   En outre, d'après la question **II.3***, cette formule est vraie pour $n = 1$.*

6. À l'aide de la partie **I**, justifier que:
$$\forall n \geq 1, \quad P(D_n) = \frac{4}{9}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right].$$

7. Pour tout entier $n \geq 2$, on note E_n l'événement "il n'y a pas eu deux PILE consécutifs au cours des n premiers lancers".

   Exprimer l'événement $\overline{E_n}$ en fonction des événements $D_2, \ldots, D_n$. En déduire que: $P(E_n) = 1 - \sum_{k=2}^{n} v_k$.

8. Calculer la limite de $P(E_n)$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 2 (facultatif)

On lance une pièce équilibrée. (la probabilité d'obtenir "pile" et celle d'obtenir "face" étant toutes deux égales à $\frac{1}{2}$) et on note Z la variable aléatoire égale au rang du lancer où l'on obtient le premier "pile".
Après cette série de lancers, si Z a pris la valeur k ($k \in \mathbb{N}^*$), on remplit une urne de k boules numérotées 1, 2, $\cdots$, k, puis on extrait au hasard une boule de cette urne.
On note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée après la procédure décrite ci-dessus.

1. On décide de coder l'événement «obtenir un pile »par 1 et l'événement «obtenir un face»par 0.

   (a) Compléter la fonction Python suivante afin qu'elle simule le lancer d'une pièce, c'est à dire renvoie 1 ou 0 avec une probabilité 1/2.

```
import numpy.random as rd
def lancer():
    a = rd.random()
    if a ...   :
        L = ...
    else:
        L = ...
    return L
```

   (b) Compléter le programme suivant afin qu'il simule la première partie de l'expérience aléatoire décrite ci-dessus et affiche la valeur prise par Z.

```
Z = 1 # nombre de lancers effectu\'es
L = lancer() # r\'esultat du premier lancer
while L != ...:
    Z = ...
    L = ...

print(Z)
```

   (c) On rappelle que l'instruction `rd.randint(a,b)` permet de simuler le tirage d'un nombre aléatoire selon la loi uniforme sur l'ensemble d'entiers $\{a, \cdots, b\}$.
   Quelles instructions faut-il rajouter à ce programme pour qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans ce problème et affiche la valeur prise par la variable aléatoire X ?

2. Etablir la convergence de la série de terme général $\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ ($k \in \mathbb{N}^*$).

3. Rappeler la loi de Z ainsi que son espérance et sa variance.

4. (a) Pour tout couple (i, k) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, déterminer la probabilité $\mathrm{P}_{[Z=k]}(X = i)$.

   (b) En déduire que $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{P}(X = i) = \sum\limits_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k$.

   (c) On admet dans cette question que l'on peut intervertir les sommes infinies : $\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\sum\limits_{k=i}^{+\infty} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty}\sum\limits_{i=1}^{k}$.

   Vérifier que $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X = i) = 1$

5. (a) Montrer que, pour tout entier naturel i non nul, on a : $i\mathrm{P}(X = i) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$

   (b) En déduire que X possède une espérance.

   (c) Montrer, en admettant qu'il est licite de permuter les symboles $\sum$ comme dans la question 4c), que

$$E(X) = \frac{3}{2}$$

6. (a) Utiliser le résultat de la question 5a) pour montrer que X a un moment d'ordre 2.

(b) Etablir, alors, toujours en admettant qu'il est licite de permuter les symboles $\sum$ comme dans la question 4c), que

$$E\left(X^2\right) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{+\infty}(k+1)(2k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

(c) Déterminer les réels a, b et c tels que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $(k+1)(2k+1) = ak(k-1) + bk + c$.

(d) En déduire la valeur de $E\left(X^2\right)$ et vérifier que $V(X) = \dfrac{11}{12}$.

7. On se propose de calculer $\mathrm{P}(X=1)$, $\mathrm{P}(X=2)$ et $\mathrm{P}(X \geq 3)$.

(a) Ecrire explicitement en fonction de x et n la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} x^{k-1}$ (n désignant un entier naturel non nul et x un réel différent de 1).

(b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \ln(2) - \int_0^{1/2}\frac{x^n}{1-x}dx \ .$$

(c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 \leq \int_0^{1/2}\frac{x^n}{1-x}dx \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{1/2}\frac{x^n}{1-x}dx$.

(d) Etablir alors que $\mathrm{P}(X=1) = \ln(2)$ puis donner la valeur de $\mathrm{P}(X=2)$.

(e) Utiliser les résultats précédents pour calculer $\mathrm{P}(X \geq 3)$, puis donner une valeur approchée de $\mathrm{P}(X \geq 3)$ en prenant $\ln 2 \simeq 0,7$.