DS n°5

le 21/11/2025
Durée : 4h

— L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
— La clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une grande part dans la notation.
— Le résultat d'une question peut être admis afin de traiter une question suivante.
— On encadrera le résultat de chaque question.

Exercice 1

1. Soit F l'ensemble des matrices de $M_2(\mathbb{R})$ de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix}$ avec a, b et c des réels.
   (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$.
   (b) Déterminer une base de F ainsi que sa dimension.
   (c) Montrer que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille libre d'éléments de F.
   (d) La famille de la question précédente est-elle une famille génératrice d'éléments de F ?
2. On considère une matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note alors $E = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = 0_{3,1}\}$.
   (a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   (b) On suppose pour la suite que $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$. Déterminer alors une base de E.
   (c) Quelle est la dimension de E ?
   (d) Montrer que les vecteurs $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base de E.

Exercice 2

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre trois à éléments réels, I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, 0_3 la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On considère, pour toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, les ensembles $E_1(A)$ et $E_2(A)$ suivants :

$$\begin{aligned} E_1(A) &= \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}); A\,M = M\} \\ E_2(A) &= \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}); A^2M = AM\} \end{aligned}$$

1. Montrer que $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
   On admettra que $E_2(A)$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
2. (a) Établir : $E_1(A) \subset E_2(A)$.
   (b) Montrer que, si A est inversible, alors $E_1(A) = E_2(A)$
3. Établir que, si $A - I_3$ est inversible, alors $E_1(A) = \{0_3\}$
4. Un exemple : Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_1(B)$ et $E_2(B)$. Préciser leur dimension.
5. Déterminer une matrice diagonale D telle que $E_1(D) \neq E_2(D)$.

Exercice 3 :

On considère deux variables aléatoires X et Y, indépendantes et suivant la même loi donnée par :

$$P(X=0)=\frac{1}{4}, P(X=1)=\frac{1}{4} \text{ et } P(X=2)=\frac{1}{2}$$

On a donc également :

$$P(Y=0)=\frac{1}{4}, P(Y=1)=\frac{1}{4} \text{ er } P(Y=2)=\frac{1}{2}$$

On pose $S=X+Y$ et $T=XY$ et on admet que S et T sont des variables aléatoires.

1. (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par S, puis déterminer la loi de S.
   (b) En déduire que l'espérance de S est égale à $\frac{5}{2}$.
   (c) Retrouver ce résultat en utilisant la relation qui définit S.
2. (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par T.
   (b) Vérifier que $P(T=0)=\frac{7}{16}$, puis déterminer la loi de T.
   (c) En déduire que l'espérance de T est égale à $\frac{25}{16}$.
   (d) Retrouver ce résultat en utilisant la relation qui définit T.
3. Déterminer la loi du couple (S,T) puis retrouver les lois de S et de T.
4. Les variables aléatoires S et T sont-elles indépendantes ?
5. Vérifier que $E(ST)=\frac{45}{8}$, puis calculer Cov(S,T).

Exercice 4

On dispose d'une pièce de monnaie amenant Pile avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$ et Face avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$.

Partie I : Étude d'une première variable aléatoire

On effectue une succession de lancers avec cette pièce et on définit la variable aléatoire X prenant la valeur du nombre de Face obtenus avant l'obtention du deuxième Pile.
On note F_k l'événement « obtenir Face au k-ème lancer » et P_k l'événement « obtenir Pile au k-ème lancer ».

1. (a) Décrire les événements $[X=0]$, $[X=1]$, $[X=2]$ puis calculer leurs probabilités.
   (b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, P[X=n]=(n+1)\dfrac{4}{3^{n+2}}$.

Partie II : Étude d'une expérience en deux étapes

On effectue une succession de lancers avec la pièce précédente jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; puis en fonction du nombre n de Face obtenus, on place $n+1$ boules dans une urne, les boules étant numérotées de 0 à n et indiscernables au toucher, et enfin on pioche au hasard une boule dans cette urne.
On note toujours X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face obtenus, et on note U la variable aléatoire prenant la valeur du numéro de la boule obtenue. On pose $V=X-U$.

1. (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire U.
   (b) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de U sachant $[X=n]$.
   (c) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$:
   $$P[U=k]=\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{n+1}P[X=n] \quad \text{puis} \quad P[U=k]=\frac{2}{3^{k+1}}.$$
   (d) Montrer que U admet une espérance et une variance et les calculer.
2. (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable V.
   (b) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de V sachant $[X=n]$.
   (c) En déduire la loi de V.
3. Montrer que les variables aléatoires U et V sont indépendantes.
4. Que vaut $\text{cov}(U,V)$? En déduire $\text{cov}(X,U)$.

Partie III : Étude d'un jeu

Dans cette partie, p désigne un réel de $]0;1[$.
Deux individus A et B s'affrontent dans un jeu de Pile ou Face dont les règles sont les suivantes :

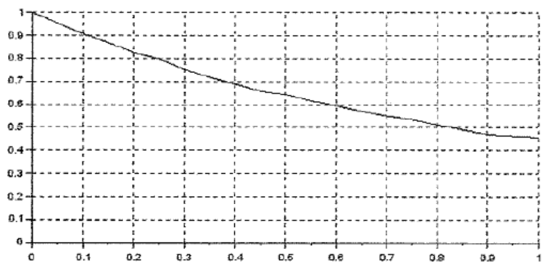
- le joueur A dispose d'une pièce amenant Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et lance cette pièce jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; on note X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;
- le joueur B dispose d'une autre pièce amenant Pile avec la probabilité p et lance cette pièce jusqu'à l'obtention d'un Pile ; on note Y la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;
- Le joueur A gagne si son nombre de Face obtenus est inférieur ou égal à celui de B ; sinon c'est le joueur B qui gagne.

On dit que le jeu est équilibré lorsque les joueurs A et B ont la même probabilité de gagner.

1. **Simulation informatique**
   (a) Écrire une fonction Python `simule_X()` qui simule la variable aléatoire X.
   On suppose le module numpy.random importé par la commande `import numpy.random as rd`.
   (b) On suppose que l'on dispose d'une fonction `simule_Y(p)` qui, prenant en argument un réel p de $]0;1[$, simule la variable aléatoire Y. Expliquer ce que renvoie la fonction suivante :

```python
def  mystere(p):
    r = 0
    N = 10**4
    for k in range(1,N+1):
        x = simule_X()
        y = simule_Y(p)
        if x <= y :
            r = r + 1
    return r/N
```

   (c) On trace, en fonction de p, une estimation de la probabilité que A gagne et on obtient le graphe suivant :



   À la vue de ce graphe, conjecturer une valeur de p pour lequel le jeu serait équilibré.

2. **Étude de la variable aléatoire Y**
   On note Z la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de lancers effectués par le joueur B.
   (a) Reconnaître la loi de Z et préciser son(ses) paramètre(s), son espérance et sa variance.
   (b) Exprimer Y à l'aide de Z et en déduire l'existence de l'espérance et de la variance de Y et préciser leurs valeurs.
   (c) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P[Y \geq n] = (1-p)^n$.

3. (a) Montrer : $P[X \leq Y] = \sum_{n=0}^{+\infty} P[X=n]P[Y \leq n]$.
   (b) Déduire des résultats précédents : $P[X \leq Y] = \dfrac{4}{(2+p)^2}$.
   (c) Déterminer la valeur de p pour laquelle le jeu est équilibré.