

Concours Blanc - V2

le 07/11/2025

Durée : 4h

- L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
- La clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une grande part dans la notation.
- Le résultat d'une question peut être admis afin de traiter une question suivante.
- On encadrera le résultat de chaque question.

Exercice 1

1. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on considère la fonction f_n définie, pour tout réel x de $[0, 1]$, par :

$$f_n(x) = \frac{x}{x+n}$$

Dresser le tableau de variations de f_n .

2. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on pose : $u_n = \int_0^1 \frac{x}{n(x+n)} dx$.

Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n(n+1)}$$

3. Montrer que la série de terme général u_n est convergente.

4. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

(a) Justifier que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente. On note γ (on prononce gamma) sa limite.

(b) Vérifier que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ puis établir que $0 \leq \gamma \leq 1$.

(c) Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

5. (a) Déterminer les deux réels a et b tels que, pour tout x de $[0, 1]$ et pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on ait

$$\frac{x}{k(x+k)} = \frac{a}{k} - \frac{b}{x+k}, \text{ puis montrer que :}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, u_k = \frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln k$$

(b) Vérifier que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1)$$

6. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on pose : $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$.

(a) Montrer que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et donner sa limite.

(b) Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}$. En déduire que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

(c) Donner alors un encadrement de γ à l'aide des réels S_n et T_n .

7. (a) En utilisant l'encadrement trouvé ci-dessus, préciser ce que représente S_n pour γ lorsque $T_n - S_n$ est inférieur ou égal à 10^{-3} ?

- (b) Déterminer $T_n - S_n$, puis compléter le script **Scilab** suivant afin qu'il affiche une valeur approchée de γ à 10^{-3} près.

```
n = 1
s = 1-np.log(2)
while ----:
    n = ----
    s = s + ----
print(----)
```

Exercice 2

Soit n un entier naturel non nul et p un réel de $]0; 1[$. On pose $q = 1 - p$

On dispose de deux urnes, l'urne U qui contient n boules numérotées de 1 à n et l'urne V qui contient des boules blanches en proportion p .

On pioche une boule au hasard dans U et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.

Si X prend la valeur k , on pioche k boules dans V , une par une, avec remise à chaque fois de la boule tirée, et on appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Dans le cas où $n = 1$, reconnaître la loi de Y .
On revient au cas général.
2. Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.
3. Soit k un élément de $[1, n]$. Reconnaître la loi de Y , conditionnellement à l'événement $(X = k)$, et en déduire, en distinguant les cas $0 \leq i \leq k$ et $k < i$, la probabilité $P_{(X=k)}(Y = i)$
4. Après l'import du module `numpy.random` par la commande `import numpy.random as rd`, on rappelle les commandes python suivantes qui permettent de simuler des variables usuelles discrètes :
— `rd.randint(a,b)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\{a, \dots, b-1\}$;
— `rd.binomial(n,p)` simule une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p .
Compléter le script Python suivant afin qu'il permette de simuler les variables X et Y :

```
n = int(input('entrez la valeur de n:'))
p = float(input('entrez la valeur de p: '))
X = ...
Y = ...
```

5. (a) Justifier que l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y est égal à $\{0, \dots, n\}$, puis montrer que :

$$P(Y = 0) = \frac{q(1 - q^n)}{n(1 - q)}$$

- (b) Écrire, pour tout i de $\{1, \dots, n\}$, la probabilité $P(Y = i)$ sous forme d'une somme de $n - i + 1$ termes que l'on ne cherchera pas à simplifier.

6. (a) Soit i et k deux entiers naturels tels que $1 \leq i \leq k \leq n$. Montrer l'égalité :

$$i \binom{k}{i} = k \binom{k-1}{i-1}$$

- (b) Établir ensuite que Y possède une espérance et que celle-ci est donnée par :

$$E(Y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(k \sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} \right)$$

- (c) En déduire que $E(Y) = \frac{(n+1)p}{2}$

7. (a) Établir que :

$$\forall n \geq 2, E(Y(Y-1)) = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \left(k(k-1) \sum_{i=2}^k \binom{k-2}{i-2} p^i q^{k-i} \right)$$

- (b) Montrer que l'on a :

$$\forall n \geq 2, E(Y(Y-1)) = \frac{(n^2 - 1)p^2}{3}$$

- (c) Vérifier que cette expression reste valable pour $n = 1$

- (d) Exprimer, sans chercher à la calculer, la variance de Y en fonction de $E(Y(Y-1))$ et $E(Y)$

Problème

Partie 1 : étude d'une variable aléatoire

Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3, et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4 et le sommet 4 au sommet 1.

Un mobile se déplace aléatoirement sur les sommets de ce carré selon le protocole suivant :

- Au départ, c'est à dire à l'instant 0, le mobile est sur le sommet 1.
- Lorsque le mobile est à un instant donné sur un sommet, il se déplace à l'instant suivant sur l'un quelconque des trois autres sommets, et ceci de façon équiprobable.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se situe le mobile à l'instant n . D'après le premier des deux points précédents, on a donc $X_0 = 1$.

1. Donner la loi de X_1 , ainsi que l'espérance $E(X_1)$ de la variable X_1 .

On admet pour la suite que la loi de X_2 est donnée par :

$$P(X_2 = 1) = \frac{1}{3} \quad P(X_2 = 2) = P(X_2 = 3) = P(X_2 = 4) = \frac{2}{9}$$

2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, donner, en justifiant, l'ensemble des valeurs prises par X_n .

3. (a) Utiliser la formule des probabilités totales pour établir que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3} (P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4))$$

- (b) Vérifier que cette relation reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

- (c) Justifier que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $P(X_n = 1) + P(X_n = 2) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4) = 1$ et en déduire l'égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(X_{n+1} = 1) = -\frac{1}{3}P(X_n = 1) + \frac{1}{3}$$

- (d) Établir alors que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(X_n = 1) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

4. (a) En procédant de la même façon qu'à la question précédente, montrer que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{3} (P(X_n = 1) + P(X_n = 3) + P(X_n = 4))$$

- (b) En déduire une relation entre $P(X_{n+1} = 2)$ et $P(X_n = 2)$.

- (c) Montrer enfin que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(X_n = 2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

5. On admet que, pour tout entier naturel n , on a :

$$P(X_{n+1} = 3) = -\frac{1}{3}P(X_n = 3) + \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad P(X_{n+1} = 4) = -\frac{1}{3}P(X_n = 4) + \frac{1}{3}$$

En déduire sans calcul que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(X_n = 3) = P(X_n = 4) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

6. Déterminer, pour tout entier naturel n , l'espérance $E(X_n)$ de la variable aléatoire X_n .

Partie 2 : calcul des puissances d'une matrice A

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on considère la matrice-ligne de $\mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R})$:

$$U_n = (P(X_n = 1) \quad P(X_n = 2) \quad P(X_n = 3) \quad P(X_n = 4))$$

1. (a) Montrer (grâce à certains résultats de la partie 1) que, si l'on pose $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = U_n A.$$

- (b) Établir par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n = U_0 A^n$.

- (c) En déduire la première ligne de A^n .

2. Expliquer comment choisir la position du mobile au départ pour trouver les trois autres lignes de la matrice A^n , puis écrire ces trois lignes.

Partie 3 : une deuxième méthode de calcul des puissances de A

On considère les matrices I et J suivantes : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les réels a et b tels que $A = aI + bJ$.
2. (a) Calculer J^2 puis établir que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $J^k = 4^{k-1}J$.
 - (b) À l'aide de la formule du binôme de Newton, en déduire, pour tout entier n non nul, l'expression de A^n comme combinaison linéaire de I et J .
 - (c) Vérifier que l'expression trouvée reste valable pour $n = 0$.