

Programme des colles des semaines S7-S8

Révisions : Calcul matriciel, systèmes linéaires

- Systèmes linéaires
- Règles de calcul sur les matrices
- Définition de l'inverse
- Calcul de l'inverse (directement, à l'aide d'un polynôme annulateur)

Chapitre : Espaces vectoriels

1. Espace vectoriel : définition, exemples usuels, règles de calcul, combinaisons linéaires
2. Sous espace vectoriel :
 - définition, caractérisation
 - SEV engendré par une famille de vecteurs
3. Bases
 - Famille libre, famille génératrice d'un SEV
 - Cas particuliers : une famille à un élément est libre ssi cet élément est non nul. Une famille formée de deux vecteurs est libre ssi ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.
 - Prop : Si on enlève un élément à une famille libre, on a toujours une famille libre. Si on ajoute un élément du SEV F à une famille génératrice de F , on a toujours une famille génératrice de F .
 - Base : définition (libre et génératrice), caractérisation (par le fait que tout élément de l'espace se décompose de manière unique comme combinaison linéaire d'élément de cette famille).
 - Bases canoniques de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Dimension
 - Définition
 - Liens entre la dimension d'un espace vectoriel et le nombre d'éléments d'une famille libre, d'une famille génératrice.
 - Dans un espace vectoriel de dimension n , une famille à n éléments est une base ssi elle est libre ssi elle est génératrice.
 - Prop : Si F est un SEV de E , alors $\dim(F) \leq \dim(E)$; et on a $\dim(F) = \dim(E)$ ssi $F = E$.
5. Rang
 - Rang d'une famille de vecteurs, d'une matrice
 - $\text{rg}({}^t A) = \text{rg}(A)$.

Chapitre : Applications linéaires (seulement en deuxième semaine)

E et F désignent des espaces vectoriels de dimension finie (avec dimension de E égale à n) ; f désigne un élément de $\mathcal{L}(E, F)$

1. Généralités

- Définition d'une application linéaire, vocabulaire (endomorphisme, isomorphisme ...)
- Premières propriétés (image du vecteur nul, image d'une combinaison linéaire de n vecteurs)
- Prop : $\mathcal{L}(E, F)$ est un SEV de $\mathcal{F}(E, F)$
- Composition, notation f^p

2. noyau d'une application linéaire

- Définition du noyau
- Exemples de détermination d'une base d'un noyau.
- Prop : le noyau de f est un SEV de E

Questions de cours

- **Famille libre :** Définition. Montrer que dans $\mathbb{R}_2[x]$ la famille formée par $x \mapsto x + 1$, $x \mapsto x - 1$ et $x \mapsto x^2$ est libre.
- **Famille libre :** Définition. Montrer si on enlève un élément à une famille libre, on obtient une famille libre.
- (seulement en deuxième semaine) **Noyau d'une application linéaire :** Définition. Montrer qu'il s'agit d'un SEV de E .
- **Famille génératrice :** Définition. Montrer (à partir de la définition) que $\mathcal{F} = ((2, 0, -2), (1, -2, 0), (2, -2, -10), (1, 1, 1))$, est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.
- **Dimension :** Définition (Def 3.13 et Thm 3.14) ; liens entre la dimension d'un espace vectoriel et le nombre d'éléments d'une famille libre, d'une famille génératrice (Prop 3.16 et 3.17).
Rem : ces propriétés sont admises.