Programme des colles des semaines S9 et S10

Espace Vectoriel

Les notions de ce chapitre sont à connaître.

Chapitre : Applications linéaires

E et F désignent des espaces vectoriels de dimension finie (avec dimension de E égale à n) ; f désigne un élément de $\mathcal{L}(E,F)$

1. Généralités
   - Définition d'une application linéaire, vocabulaire (endomorphisme, isomorphisme ...)
   - Premières propriétés (image du vecteur nul, image d'une combinaison linéaire de n vecteurs)
   - Prop : $\mathcal{L}(E,F)$ est un SEV de $\mathcal{F}(E,F)$
   - Composition, notation f^p
2. Image et noyau d'une application linéaire
   - Définition du noyau
   - Prop : le noyau de f est un SEV de E
   - Prop : f est injective ssi Ker $(f) = \{\overrightarrow{0_E}\}$
   - Définition de l'image
   - Prop : l'image de f est un SEV de F
   - Prop : si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une partie génératrice de $\text{Im}(f)$
   - Définition du rang de f
   - Prop : image d'une famille libre par une application linéaire injective ; conséquence sur les dimensions (alors $\dim(E) \leq \dim(F)$)
   - Prop : image d'une famille génératrice par une application linéaire surjective ; conséquence sur les dimensions (alors $\dim(E) \geq \dim(F)$)
   - Prop : image d'une base par un isomorphisme ; conséquence sur les dimensions (alors $\dim(E) = \dim(F)$)
   - Prop : un isomorphisme conserve le rang
   - Prop : théorème du rang
   - Prop : conséquence pour un endomorphisme (f injective ssi f surjective ssi f bijective)
3. Matrice d'une famille de vecteurs dans une base
   - Matrice colonne représentant un vecteur dans une base
   - Matrice représentant une famille de vecteurs dans une base
   - Matrice de changement de base
   - Prop : première formule de changement de base (pour les matrices colonnes représentants des vecteurs)
4. Matrice d'une application linéaire
   - Définition de la matrice d'une application linéaire f par rapport à des bases
   - Prop : la multiplication par cette matrice de la matrice colonne représentant un vecteur u de E donne comme résultat la matrice colonne représentant $f(u)$ (dans les bases adaptées).
   - Matrice d'une combinaison linéaire de deux applications linéaires
   - Matrice de la composée de deux applications linéaires, des puissances d'un endomorphisme
   - Formule de changement de base (pour les endomorphismes)
   - Matrices semblables

Questions de cours

- **Définition du noyau d'une application linéaire ; démonstration du fait qu'il s'agit d'un SEV**

- **Caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire par le noyau :**

- **Image d'une famille libre par une application linéaire injective :**
  Enoncé, démonstration, conséquence sur les dimensions (Prop 2.12, premier point)