DM n°2

À rendre le 12/12/2025

Exercice 1

On note $J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et $J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et on rappelle que la famille(J_1, J_2, J_3, J_4) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Soit f l'application qui, à toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, associe $f(M) = M + (a+d)\, I$ où I désigne la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. (a) Exprimer $f(J_1)$, $f(J_2)$, $f(J_3)$, et $f(J_4)$ comme combinaisons linéaires de J_1, J_2, J_3 et J_4.
   (b) Déterminer la matrice A de f dans la base (J_1, J_2, J_3, J_4).
3. (a) Montrer que $(J_1 - J_4, J_2, J_3, I)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
   (b) Écrire la matrice D de f dans cette base.
   (c) En déduire l'existence d'une matrice P inversible telle que $A = P\,D\,P^{-1}$
4. (a) Déterminer la matrice P^{-1}.
   (b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $A^n = P\,D^n P^{-1}$
   (c) En déduire explicitement la matrice A^n.

Exercice 2 (facultatif)

On note E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 et on rappelle que la famille (e_0, e_1, e_2) est une base de E, les fonctions e_0, e_1 e_2 étant définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad e_0(t) = 1 \quad e_1(t) = t \quad e_2(t) = t^2$$

On considère l'application φ qui, à toute fonction P de E, associe la fonction, notée $\varphi(P)$, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad (\varphi(P))(x) = \int_0^1 P(x+t)\, dt$$

1. (a) Montrer que φ est linéaire.
   (b) Déterminer $(\varphi(e_0))(x)$, $(\varphi(e_1))(x)$ et $(\varphi(e_2))(x)$ en fonction de x, puis écrire $\varphi(e_0)$, $\varphi(e_1)$ et $\varphi(e_2)$ comme combinaison linéaire de e_0, e_1 et e_2.
   (c) Déduire des questions précédentes que φ est un endomorphisme de E.
2. (a) Écrire la matrice A de φ dans la base (e_0, e_1, e_2). On vérifiera que la première ligne de A est :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

(b) Justifier que φ est un automorphisme de E.

(c) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

3. Compléter les commandes `Python` suivantes pour que soit affichée la matrice A^n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur :

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al

n = int(input('entrez une valeur pour n : '))
A = np.array([......])
print(...)
```

4. (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, il existe un réel u_n tel que l'on ait :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donner u_0 et établir que : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{6}(3n+2).$

(b) En déduire, par sommation, l'expression de u_n pour tout entier n.

(c) Écrire A^n sous forme de tableau matriciel.

Exercice 3 (facultatif)

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$.
On désigne par I la matrice identité de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$
et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^5$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Déterminer la dimension de l'image de f, puis montrer que la famille $(e_2 + e_3 + e_4, e_1 + e_5)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.
   (b) En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$, puis donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

2. On note $u = e_2 + e_3 + e_4$ et $v = e_1 + e_5$.
   (a) Écrire $f(u)$ et $f(v)$ comme combinaisons linéaires de e_1, e_2, e_3, e_4, e_5,
   puis $f(u - v)$ et $f(u + 3v)$ comme combinaisons linéaires de u et v.
   (b) En déduire les valeurs propres de f et préciser les sous-espaces propres associés.
   (c) Établir que C est diagonalisable et déterminer une matrice D diagonale et une matrice R inversible telles que $C = RDR^{-1}$.

3. (a) Établir la relation suivante : $D(D + I)(D - 3I) = 0$.
   (b) En déduire que le polynôme P défini par $P(X) = X^3 - 2X^2 - 3X$
   est un polynôme annulateur de C.

4. On admet que (principe de la division euclidienne), pour tout entier naturel n non nul,
   il existe un unique polynôme Q_n et trois réels a_n, b_n et c_n tels que :

$$X^n = (X^3 - 2X^2 - 3X)Q_n(X) + a_nX^2 + b_nX + c_n$$

   (a) En utilisant les racines de P, déterminer les valeurs de a_n, b_n et c_n en fonction de n.
   (b) Déduire de ce qui précède l'expression, pour tout entier naturel n non nul, de C^n en fonction de C et C^2.