RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

L'objectif de la réduction des endomorphisme est d'expliquer comment l'on peut écrire certaines matrices A sous la forme $A = PDP^{-1}$, où D est diagonale. On a vu dans des exercices que cette écriture permet (entre autres) de calculer les puissances de A. Une des applications est l'étude des chaînes de Markov, mais ces résultats ont de nombreuses autres applications dans de nombreux domaines des mathématiques appliquées.

Dans tout ce chapitre, E désigne un espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B}$ une base de E.

1 Éléments propres d'un endomorphisme

1.1 Valeurs propres et vecteurs propres

Définition 1.1. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

- *Un nombre réel λ est appelé valeur propre de f lorqu'il existe un vecteur non nul $\overrightarrow{u}$ de E tel que :*
$$f(\overrightarrow{u}) = \lambda \overrightarrow{u} .$$
Un tel vecteur est alors appelé vecteur propre associé à λ.
- *Un nombre réel λ est appelé valeur propre de A lorqu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que :*
$$X \neq 0_{n,1} \quad \text{et} \quad A\, X = \lambda\, X .$$
Un tel vecteur est alors appelé vecteur propre associé à λ.
- *L'ensemble des valeurs propres de f (resp. de A) est appelé spectre de f (resp. de A) et noté $\mathrm{Sp}(f)$ (resp $\mathrm{Sp}(A)$).*

Remarque 1.2. *On notera que $f(\overrightarrow{u}) = \lambda \overrightarrow{u}$ est équivalent à $(f - \lambda \,\mathrm{Id}_E)(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0_E}$ et que $A\, X = \lambda\, X$ est équivalent à $(A - \lambda I_n)\, X = 0_{n,1}$.*

Exemples 1.3.
1. *Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ l'endomorphisme défini par $g(P) = (X-1)P' + P$. Montrer que $R(X) = (X-1)^2$ est un vecteur propre et déterminer la valeur propre associée.*
2. *Soit $B = \begin{pmatrix} 11 & -4 & -12 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10 & -4 & -11 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer que X est un vecteur propre et déterminer la valeur propre associée.*

Remarque 1.4. *Dans les exemples précédents, les vecteurs propres sont donnés. Se pose la question de la détermination des éléments propres sans indication. Pour cela - dans le cas matriciel mais il en est de même pour un endomorphisme - il faut déterminer les valeurs de λ telles que l'équation $AX = \lambda X$ ait une solution non nulle. On se retrouve à résoudre un système d'équations linéaires avec un paramètre (λ), ce qui est en général techniquement compliqué. Nous verrons des exemples en TD.*

Propriété 1.5. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sa matrice dans la base $\mathcal{B}$. Alors $\overrightarrow{u}$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ si et seulement si la matrice colonne représentant $\overrightarrow{u}$ dans la base $\mathcal{B}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ. Par conséquent, A et f ont exactement les mêmes valeurs propres.*

Démonstration :

Propriété 1.6. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

- *Le réel λ est une valeur propre de f si et seulement si $f - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas injectif (ce qui est équivalent à dire que $f - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas bijectif).*
- *Le réel λ est une valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.*

Démonstration :

Un cas particulier important :

Corollaire 1.7. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

- 0 *est une valeur propre de f si et seulement si f n'est pas injectif (ce qui est équivalent à dire que f n'est pas bijectif).*
- 0 *est une valeur propre de A si et seulement si A n'est pas inversible.*

Propriété 1.8 (Valeurs propres d'une matrice triangulaire)**.** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Supposons que la matrice A est triangulaire. Alors les valeurs propres de A sont les éléments de sa diagonale.*

Démonstration :

Propriété 1.9 (Valeurs propres d'une matrice semblable à une matrice diagonale). *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale $D = diag(d_1, \dots, d_n)$ telles que $A = PDP^{-1}$.*
Alors les valeurs propres de A sont les d_i (avec possible égalité de plusieurs d'entre eux).

Démonstration :

1.2 Sous-espaces propres

Lemme 1.10 (et définition). *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.*

- *On note $E_\lambda(f) = \{\overrightarrow{u} \in E \ / \ f(\overrightarrow{u}) = \lambda \overrightarrow{u}\}$. Alors $E_\lambda(f) = \text{Ker } (f - \lambda \text{Id}_E)$; en particulier, $E_\lambda(f)$ est un SEV de E.*
- *On note $E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = \lambda X\} = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \ / \ (A - \lambda I_n)X = 0_{n,1}\}$. $E_\lambda(A)$ est un SEV de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.*

Démonstration :

Remarque 1.11. *On parle parfois (abusivement) de noyau d'une matrice $B \in \mathcal{M}_{n,p}$ au lieu du noyau de l'application (linéaire) qui à $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ associe $BX \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (application "multiplication matricielle") ; on note alors* Ker (B)*. Avec cette notation, on peut écrire $E_\lambda(A) = \text{Ker } (A - \lambda I_n)$.*
De manière général, le vocabulaire pour les matrices est "parallèle" à celui pour les applications linéaire (vecteur propre, valeur propre ...) est en fait le même si l'on considère l'application qui à $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ associe $AX \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Remarque 1.12. *Quel que soit λ, $\overrightarrow{0_E} \in E_\lambda(f)$ (resp. $0_{n,1} \in E_\lambda(A)$). Dire que λ est valeur propre signifie qu'il y a d'autres éléments dans $E_\lambda(f)$ (resp. $E_\lambda(A)$).*

Définition 1.13. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

- *Soit λ une valeur propre de f. Le SEV $E_\lambda(f)$ est appelé <u>sous espace propre</u> associé à λ.*
- *Soit λ une valeur propre de A. Le SEV $E_\lambda(A)$ est appelé <u>sous espace propre</u> associé à λ.*

Exemple 1.14. *On reprend* $B = \begin{pmatrix} 11 & -4 & -12 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10 & -4 & -11 \end{pmatrix}$. *On a vu que* 1 *en était valeur propre. Déterminer* $E_1(B)$.

Propriété 1.15. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *Si* λ *est valeur propre de* A, *alors la dimension du sous espace propre associé vérifie :*

$$dim(E_\lambda(A)) = n - rg(A - \lambda I_n) \ .$$

Cette propriété d'adapte bien sûr à un endomorphisme f *d'un espace vectoriel de dimension* n.

Démonstration :

2 Polynômes de matrices

Pour un polynôme $P = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note

$$P(A) = \sum_{i=0}^{m} a_i A^i \ .$$

On énonce les propriétés de ce paragraphe sur les matrices ; elles sont similaires pour des endomorphismes.
On aura besoin du point technique suivant.

Lemme 2.1. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Si le réel λ *est une valeur propre de* A *et* X *un vecteur propre associé, alors, pour* $p \in \mathbb{N}$, $A^p\ X = \lambda^p\ X$.

Démonstration :

Cela a pour conséquence :

Propriété 2.2. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et soit* P *un polynôme.*
Si λ *est une valeur propre de* A, *alors* $P(\lambda)$ *est une valeur propre de* $P(A)$.

Démonstration :

Définition 2.3. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Un polynôme P est dit annulateur pour A lorsque $P(A) = 0_n$.*

Propriété 2.4. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit P un polynôme annulateur de A.*
Si λ est une valeur propre de A, alors $P(\lambda) = 0$.

Démonstration :

Exemple 2.5. *On reprend* $B = \begin{pmatrix} 11 & -4 & -12 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10 & -4 & -11 \end{pmatrix}$.

1. *Vérifier que $B^2 - I_3 = 0_3$.*
2. *En déduire les valeurs propres possibles de B.*
3. *Déterminer l'ensemble des éléments propres de B.*

Remarque 2.6. *Là encore, on a donné une indications pour déterminer les valeurs propres.*

Remarque 2.7. *Attention, la réciproque de la propriété qui précède est fausse.*
Exemple : dans l'exemple qui précède, on a aussi $B^3 - B = 0_3$ (on a multiplié par B à gauche et à droite). Or 0 est racine de $X^3 - X$ mais n'est pas valeur propre de B.
En pratique : une fois que l'on a montré qu'un polynôme P est annulateur d'une matrice A (ou d'un endomorphisme f), on détermine les racines de P. Celles-ci sont les valeurs propres possibles de A. Pour déterminer si un nombre λ, racine de P, est une valeur propre de A, on résout alors $AX = \lambda X$.

Remarque 2.8. *De manière similaire, si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n et si $P = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i$ est un polynôme, on définit*

$$P(f) = \sum_{i=0}^{m} a_i f^i \ .$$

Les propriétés ci-dessus restent alors valables.

3 Diagonalisation d'un endomorphisme

Rappelons que E désigne un espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B}$ une base de E.

3.1 Définition de la diagonalisabilité

L'études des éléments propres a pour but de déterminer une base dans laquelle l'expression de f est plus simple.

Définition 3.1. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est diagonalisable lorsqu'il existe une base $\mathcal{B}'$ de E formée de vecteurs propres de f.*

Expression matricielle : Supposons que A est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Supposons que f est diagonalisable dans une base $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_n})$ (ce qui signifie que $\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_n}$ sont des vecteurs propres de f). Notons, pour $1 \leq i \leq n$, λ_i la valeur propre associée à $\overrightarrow{u_i}$ (toutes ne sont pas forcément distinctes). La matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ est alors :

$$D = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} .$$

Ceci explique le terme "diagonalisable" choisi. De plus, si l'on note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, on a

$$D = P^{-1}AP .$$

Définition 3.2. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice A est dite diagonalisable lorsqu'il existe une matrice diagonale D et un matrice inversible P telles que*

$$A = PDP^{-1} .$$

Exemple 3.3. *On reprend la matrice $B = \begin{pmatrix} 11 & -4 & -12 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10 & -4 & -11 \end{pmatrix}$; on note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont B est la matrice dans la base canonique.*

1. *Déterminer l'ensemble des éléments propres de g.*
2. *Pour chaque sous espace propre, on a déterminé une base. On prend les vecteurs (il peut y avoir plusieurs choix) de ces bases et on forme une famille avec (qui comporte 3 vecteurs). Montrer que cette famille est une base de $\mathbb{R}^3$.*
3. *En déduire que g est diagonalisable.*
4. *Déterminer D diagonale et P inversible telles que $D = P^{-1}BP$*

Suite de l'exemple.

3.2 Critères de diagonalisabilité

Avant de donner des critères de diagonalisabilité, on donne une propriété importante des famille de vecteurs propres.

Propriété 3.4 (admise)**.** *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ des valeurs propres distinctes de f et $\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_r}$ des vecteurs propres associés. Alors la famille $(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_r})$ est libre.*
En particulier cela implique $r \leq n$.

Ainsi, si f admet n valeurs propres distinctes, et si $\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_n}$ sont des vecteurs propres associés, alors ils forment une base de E et f est diagonalisable. On obtient ainsi :

Corollaire 3.5. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*
Si f (resp. A) a n valeurs propres distinctes, f (resp. A) est diagonalisable.

Propriété 3.6 (admise)**.** *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ des valeurs propres distinctes de f et $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_r$ des bases respectives de $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_r}$. On note $\mathcal{F}$ la famille formée par la réunion des éléments de ces bases. Alors $\mathcal{F}$ est libre.*

Conséquence : en dimension n, la somme des dimensions des sous-espaces propres est au plus n.

La propriété précédente nous permet d'établir le critère de diagonalisabilité suivant :

Théorème 3.7. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de f et $E_{\lambda_1}(f), \ldots, E_{\lambda_r}(f)$ les sous-espaces propres associés. Alors f est diagonalisable si et seulement si :*

$$\sum_{i=1}^{r} \dim(E_{\lambda_i}(f)) = n \ .$$

On a bien sûr la version matricielle :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de A et $E_{\lambda_1}(A), \ldots, E_{\lambda_r}(A)$ les sous-espaces propres associés. Alors A est diagonalisable si et seulement si :

$$\sum_{i=1}^{r} \dim(E_{\lambda_i}(A)) = n \ .$$

Exemple 3.8. *Si l'on reprend l'exemple du paragraphe précédente, ce théorème nous permet d'éviter de montrer que la famille formée à partir des bases des sous espaces propres est une base.*

Nous terminons avec un critère éloigné de ce qui précède et que nous admettrons.

Propriété 3.9 (admise)**.** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*
Si A est symétrique (c'est à dire égale à sa transposée), alors A est diagonalisable.

3.3 Version uniquement matricielle d'une diagonalisation

Reprenons la matrice $B = \begin{pmatrix} 11 & -4 & -12 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10 & -4 & -11 \end{pmatrix}$.

On se passe parfois de l'introduction de l'endomorphisme g pour expliquer sa diagonalisation.
Si l'on demande de montrer que B est diagonalisable et d'effectuer cette diagonalisation, on procède ainsi (après avoir déterminé les valeurs propres de B) :

- On détermine une base de chaque sous-espace propre de B.
- Comme la somme des dimensions des sous-espaces propres de B vaut 3, on déduit du théorème précédent que B est diagonalisable.
- On construit la matrice diagonale D en mettant sur la diagonale les valeurs propres de B (si $E_\lambda(A)$ est de dimension d, on met d fois λ sur la diagonale).
- On construit la matrice P en mettant dans ses colonnes les vecteurs propres de B (dans le même ordre que l'on a mis les valeurs propres sur la diagonale de D).
- On a alors $B = PDP^{-1}$.

Remarquons que cette méthode suit exactement ce que l'on fait en invoquant l'endomorphisme canoniquement associé à B. Elle peut paraître plus rapide, mais elle cache un peu l'aspect changement de base qui est à l'origine de cette diagonalisation.