Feuille d'exercices n°6 : Réduction des endomorphismes

1 Méthodes de base

Exercice 1. – Vérifier qu'un vecteur est vecteur propre, diagonaliser – On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(x,y) = (3x - y, 2x)$. On note $v_1 = (1,1)$ et $v_2 = (1,2)$.

1. Montrer que v_1 et v_2 sont des vecteurs propres et déterminer les valeurs propres associées.
2. Quelle est la matrice D de f dans la base (v_1, v_2).
3. Déterminer le lien entre la matrice A de f dans la base canonique et D.

Exercice 2. – Déterminer les valeurs et vecteurs propres directement – On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(x,y) = (3x - y, 2x)$. On va voir comment déterminer les éléments propres donnés à l'exercice précédent.

1. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique.
2. Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de λ la matrice $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible (on pourra utiliser le déterminant).
3. En déduire les éléments propres de A puis ceux de f.

Exercice 3. – Lien entre un polynôme annulateur et le spectre d'une matrice – On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & -18 \\ -6 & -4 & -18 \\ 3 & 3 & 11 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A + I_3)(A - 2I_3)$.
2. Que peut-on en déduire quant au spectre de A.

Exercice 4. – Montrer qu'une matrice est diagonalisable à l'aide des dimensions des sous-espaces propres – On reprend la matrice A de l'exercice précédent et on utilise son résultat.

1. Déterminer les valeurs propres de A ainsi qu'une base de chaque sous-espace propre de A.
2. En déduire que A est diagonalisable et effectuer cette diagonalisation (c'est à dire écrire $A = PDP^{-1}$, où D est diagonale et P inversible).

Exercice 5. – Variante du précédent en utilisant le rang de certaines matrices – On reprend la matrice A de l'exercice précédent.

1. Déterminer le rang de $A + I_3$ et $A - 2I_3$.
2. En déduire les valeurs propres de A et montrer que A est diagonalisable.

Exercice 6. – Matrice triangulaire – On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Quelles sont les valeurs propres de A ?
2. A est-elle diagonalisable ?

2 Divers

Exercice 7. – Vérifier que les vecteurs u_i donnés sont des vecteurs propres des endomorphismes suivants. Préciser pour quelles valeurs propres.

1. $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par $\phi(e_1) = 2e_2 + 3e_3$, $\phi(e_2) = e_1 + e_2 - e_3$ et $\phi(e_3) = -2e_1 + 2e_2 + 5e_3$ et $u_1 = e_1 - e_2 - e_3$, $u_2 = -e_1 + e_2 + 2e_3$, $u_3 = -e_1 + e_3$. ((e_1, e_2, e_3) désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$.)

2. $\psi : \mathbb{R}_1[X] \to \mathbb{R}_1[X]$ défini par $\psi(1) = 2 + X$ et $\psi(X) = 2 + 3X$ et $u_1 = 2 - X$, $u_2 = 1 + X$.

Exercice 8. – Soit A la matrice carrée d'ordre 3 définie par $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer sans calcul que A est diagonalisable.

2. La matrice A est-elle inversible ? En déduire une valeur propre de A.

3. (a) Calculer $A^3 - A^2 - 2A$.
   (b) En déduire les valeurs propres possibles de la matrice A.
   (c) Déterminer les valeurs propres et sous espaces propres de A.
   (d) Déterminer D diagonale et P inversible telles que $A = PDP^{-1}$.

4. On note I la matrice identité d'ordre 3.
   Soit M la matrice carrée définie par $M = I - 2A + 5A^2$.
   Montrer que M est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

Exercice 9. – **Un exemple de matrice non diagonalisable** –
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Quelles sont les valeurs propres de A ?
2. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 10. – On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$f(e_1) = \frac{1}{3}(e_2 + e_3) \quad \text{et} \quad f(e_2) = f(e_3) = \frac{2}{3}e_1 .$$

1. Écrire la matrice M de f dans $\mathcal{B}$.

2. Déterminer le rang de f puis la dimension de Ker (f).

3. Donner une base de Ker (f) ; traduire cela en terme d'éléments propres.

4. Calculer M^2 puis M^3. En déduire une relation entre M et M^3.

5. En déduire les autres valeurs propres de f puis les sous espaces propres associés.

6. En déduire que f est diagonalisable. Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $M = PDP^{-1}$.

Exercice 11. – Commutant – On reprend les notations de l'exercice 1 ($D = P^{-1}AP$). Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble $\mathcal{C}_A$ des matrices qui commutent avec A.

1. Montrer que $\mathcal{C}_A$ est un SEV de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. (a) Montrer qu'une matrice M commute avec A ssi $P^{-1}MP$ commute avec D.
   (b) Déterminer par le calcul l'ensemble des matrices qui commutent avec D.
   (c) En déduire $\mathcal{C}_A$ (on en donnera une base).
3. Montrer que (I_2, A) est une base de $\mathcal{C}_A$.

Exercice 12. – Résolution d'une équation matricielle – On reprend les notations de l'exercice précédent. Le but de l'exercice est de résoudre l'équation matricielle $M^2 = A$.

1. Montrer que $M^2 = A \Leftrightarrow (P^{-1}MP)^2 = D$.
2. Montrer que si N est solution de l'équation $N^2 = D$, alors N commute avec D.
3. Résoudre l'équation $N^2 = D$.
4. Résoudre l'équation $M^2 = A$.

Exercice 13. – Quelques résultats théoriques –

1. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie et λ une valeur propre de f.
   (a) Montrer que $E_\lambda(f)$ est stable par f, c'est à dire que : $\forall u \in E_\lambda(f)$, $f(u) \in E_\lambda(f)$.
   (b) Montrer que si $\lambda \neq 0$, $E_\lambda(f) \subset \text{Im}\,(f)$.
   (c) Si μ une valeur propre de f différente de λ, montrer que $E_\lambda(f) \cap E_\mu(f) = \{O_E\}$.
2. Montrer que des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes forment une famille libre.
3. Montrer que deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres et que les sous-espaces propres associés ont mêmes dimensions.
4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A et ${}^tA$ ont les mêmes valeurs propres et que les sous-espaces propres associés ont mêmes dimensions.

Exercice 14. – Détermination directe des valeurs propres d'une matrice–
Dans la plupart des exercices, une indication est donnée pour déterminer les valeurs propres (sous la forme d'un polynôme annulateur par exemple). Peut-on les déterminer sans aide ? On a vu que c'était le cas en dimension 2 (Ex2).
On va voir dans cet exercice que c'est également le cas en dimension supérieur. Cependant, ce calcul étant souvent fastidieux, le programme indique explicitement qu'il doit être évité.

Soit A la matrice carrée d'ordre 3 définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
En résolvant le système $(A - \lambda I_3)X = 0$ en fonction du paramètre λ, déterminer les valeurs propres de A.

3 Problème

Exercice 15. – Endomorphisme d'un espace de polynômes (d'après EDHEC 2011) –
On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à 2 et on note $\mathcal{B}$ la base (e_0, e_1, e_2) de E, où pour tout réel x, on a : $e_0(x) = 1$, $e_1(x) = x$ et $e_2(x) = x^2$. On considère l'application, notée f, qui à toute fonction polynômiale P appartenant à E, associe la fonction polynômiale $f(P)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (f(P))(x) = 2xP(x) - \left(x^2 - 1\right) P'(x)$$

1. (a) Montrer que f est une application linéaire.
   (b) En écrivant, pour tout réel x, $P(x) = a + bx + cx^2$, définir explicitement $(f(P))(x)$ puis en déduire que f est un endomorphisme de E.
   (c) Ecrire $f(e_0)$, $f(e_1)$ et $f(e_2)$ comme des combinaisons linéaires de e_0, e_1 et e_2, puis en déduire la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.
2. (a) Vérifier que $\operatorname{Im} f = \operatorname{vect}(e_1, e_0 + e_2)$ et donner la dimension de $\operatorname{Im} f$.
   (b) Déterminer $\operatorname{Ker} f$.
3. (a) Calculer A^2 puis A^3.
   (b) En déduire que f est diagonalisable et donner les sous-espaces propres de f.
   (c) Vérifier que les sous-espaces propres de f, autres que $\operatorname{Ker} f$, sont inclus dans $\operatorname{Im} f$.