Corrigé du DM n°2

À rendre le 12/12/2025

Exercice 1

D'après EDHEC E 2005

On note $J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et $J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et on rappelle que la famille(J_1, J_2, J_3, J_4) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Soit f l'application qui, à toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, associe $f(M) = M + (a+d)I$ où I désigne la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. f est définie pour tout matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et à valeurs dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et f est une application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   N.B. Comme $f(M)$ est définie à partir des coefficients de la matrice M, pour calculer $f(\alpha M + \beta N)$ il faut d'abord calculer les coefficients.$\alpha M + \beta N$.

   Pour toutes matrices $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et α et β de $\mathbb{R}$ on a :

   $\alpha M + \beta N = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta a' & \alpha c + \beta c' \\ \alpha b + \beta b' & \alpha d + \beta d' \end{pmatrix}$

   donc

$$\begin{aligned} f(\alpha M + \beta N) &= \alpha M + \beta N + (\alpha a + \beta a' + \alpha d + \beta d')\, I \\ &= \alpha M + (\alpha a + \alpha d)\, I + \beta N + (\beta a' + \beta d')\, I \\ &= \alpha\left[M + (a+d)\, I\right] + \beta\left[N + (a'+d')\, I\right] \\ &= \alpha f(M) + \beta f(N) \end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{f \text{ est bien un endomorphisme de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).}$

2. (a) $f(J_1) = J_1 + 1I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2J_1 + J_4$

   $f(J_2) = J_2 + 0I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = J_2$

   $f(J_3) = J_3 + 0I = J_3$

   $f(J_4) = J_4 + 1I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = J_1 + 2J_4$

   (b) On a donc les coordonnées des images des vecteurs de la base $\mathcal{C} = (J_1, J_2, J_3, J_4)$
   Les coordonnée de $f(J_1)$ sont $(2,0,0,1)$, celle de $f(J_2)$ sont $(0,1,0,0)$ celles de $f(J_3)$ sont $(0,0,1,0)$ et enfin celle de $f(J_4)$ sont $(1,0,0,2)$

   Donc la matrice A de f dans la base (J_1, J_2, J_3, J_4) est $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3. (a) On montre que la famille $(J_1 - J_4, J_2, J_3, I)$ est libre :
   Soient $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$
   Si $x\,(J_1 - J_4) + y\,J_2 + z\,J_3 + t\,I = 0$ alors $\begin{pmatrix} x+t & y \\ z & -x+t \end{pmatrix} = 0$
   D'où $y = z = 0$
   et de $x + t = 0$ et $x - t = 0$ en additionnant on tire $x = 0$ et $t = 0$
   Donc la famille $\mathcal{B} = (J_1 - J_4, J_2, J_3, I)$ est libre dans un espace vetoriel de dimension 4,
   Conclusion : $\boxed{\text{C'est une base de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$

   (b) On calcule les images puis leurs coordonnées dans $\mathcal{B}$:
   $f(J_1 - J_4) = f(J_1) - f(J_4) = 2J_1 + J_4 - J_1 - 2J_4 = J_1 - J_4$ (coordonnées $(1, 0, 0, 0)$ dans $\mathcal{B}$)
   $f(J_2) = J_2$ (coordonnées $(0, 1, 0, 0)$ dans $\mathcal{B}$)
   $f(J_3) = J_3$ (coordonénes $(0, 0, 1, 0)$ dans $\mathcal{B}$)
   $f(I) = I + 2I = 3I$ (coordonnée $(0, 0, 0, 3)$ dans $\mathcal{B}$)
   Donc la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

   (c) Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}$, matrice des coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{C}$:
   Comme $I = J_1 + J_4$ on a $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   La formule de changement de base donne alors $\mathrm{mat}_C(f) = \mathrm{mat}_C\mathcal{B} \cdot \mathrm{mat}_{\mathcal{B}} f \cdot \mathrm{mat}_C \mathcal{B}$ donc
   Conclusion : $\boxed{A = P \cdot D \cdot P^{-1}}$

4. (a) On calcule P^{-1} par le pivot de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_1 + L_4 \end{matrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 - L_4/2 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4/2 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ donc } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

   (b) Par récurrence :
   - Pour $n = 0$ on a $P\,D^0 P^{-1} = I = A^0$
   - Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n = P\,D^n P^{-1}$
     alors $A^{n+1} = AA^n = P\,DP^{-1}P\,D^{n+1}P^{-1} = P\,D^{n+1}P^{-1}$

   Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N},\ A^n = P\,D^n P^{-1}}$

(c) Comme la matrice D est diagonale, on a directement ses puissance et

$$\begin{aligned}
A^n &= P\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & -1/2\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & -1/2\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 3^n/2 & 0 & 0 & 3^n/2\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} \frac{1+3^n}{2} & 0 & 0 & \frac{-1+3^n}{2}\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \frac{-1+3^n}{2} & 0 & 0 & \frac{1+3^n}{2}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Exercice 2 (facultatif)

D'après EDHEC E 2017

1. (a) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et P et Q deux éléments de E.
$\varphi(\alpha P+Q)(x) = \int_0^1 (\alpha P+Q)(x+t)dt = \int_0^1 (\alpha P(x+t)+Q(x+t))dt = \alpha\int_0^1 P(x+t)dt + \int_0^1 Q(x+t)dt$
On a donc bien , $\varphi(\alpha P+Q) = \alpha\varphi(P)+\varphi(Q)$ et $\boxed{\varphi \text{ est linéaire.}}$

(b) $\varphi(e_0)(x) = \int_0^1 e_0(x+t)dt = \int_0^1 1dt = 1$

$\varphi(e_1)(x) = \int_0^1 e_1(x+t)dt = \int_0^1 (x+t)dt = \int_0^1 xdt + \int_0^1 tdt = \Big[x.t\Big]_{t=0}^{t=1} + \left[\frac{t^2}{2}\right]_{t=0}^{t=1} = x+\frac{1}{2}$

$\varphi(e_2)(x) = \int_0^1 e_2(x+t)dt = \int_0^1 (x+t)^2dt = \int_0^1 x^2+2xt+t^2dt = \left[x^2.t+x.t^2+\frac{t^3}{3}\right]_{t=0}^{t=1} = x^2+x+\frac{1}{3}$

Par conséquent: $\boxed{\varphi(e_0)=e_0,\ \varphi(e_1)=\frac{1}{2}e_0+e_1 \text{ et } \varphi(e_2)=\frac{1}{3}e_0+e_1+e_2\ .}$

(c) Montrons que φ est à valeurs dans E. Soit $P=\alpha e_0+\beta e_1+\gamma e_2$ un polynôme de E.
La linéarité de φ montre que $\varphi(P)=\alpha\varphi(e_0)+\beta\varphi(e_1)+\gamma\varphi(e_2)$.
Or ,comme on l'a vu au (b) :$\varphi(e_0)=e_0\in E$, $\varphi(e_1)=\frac{1}{2}e_0+e_1\in E$ et $\varphi(e_2)=\frac{1}{3}e_0+e_1+e_2\in E$ et E est stable par combinaison linéaire , donc $\boxed{\varphi(P)\in E.}$
φ est linéaire et à valeurs dans E, donc $\underline{\varphi \text{ est un endomorphisme de } E.}$

2. (a) D'après les résultats du 1.(b), la matrice A de φ dans la base (e_0, e_1, e_2) est:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) La matrice A de φ dans la base (e_0, e_1, e_2) est triangulaire avec 3 pivots non nuls , elle est donc inversible et φ est bijectif . φ est un automorphisme de E. (endomorphisme bijectif de E).

(c) La matrice A est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux : ainsi, A et donc φ admet 1 comme unique valeur propre. Ainsi, $\boxed{\mathrm{Spec}(\varphi) = \{1\}}$

Raisonnons par l'absurde : si φ était diagonalisable, puisque 1 est la seule valeur propre de φ, il existerait une matrice P inversible telle que $PAP^{-1} = I$ ce qui impliquerait $A = I$ ce qui est absurde!
Ainsi, φ n'est pas diagonalisable.

3. Les commandes **Python** suivantes affichent la matrice A^n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur:

```
A = np.array([[1 , 1/2 , 1/3] , [ 0 , 1 , 1] , [ 0 , 0 , 1]])
print(al.matrix_power(A,n))
```

4. (a) Démontrons la propriété $P(n)$: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/2 & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ par récurrence :

• initialisation: Pour $n = 0$, on a bien $A^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0/2 & u_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $u_0 = 0$.

Un peu de rab : Pour $n = 1$, on a bien $A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & u_1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $u_1 = \dfrac{1}{3}$.

• hérédité: En supposant $P(n)$ vraie, calculons $A^{n+1} = A.A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & n/2 & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On obtient alors , $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} + \frac{1}{2} & u_n + \frac{n}{2} + \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n+1}{2} & u_{n+1} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

avec $u_{n+1} = u_n + \dfrac{n}{2} + \dfrac{1}{3} = u_n + \dfrac{1}{6}\,(3n+2)$.

• conclusion: Pour tout entier naturel n , il existe un réel u_n tel que $\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/2 & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$,

avec $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{6}\,(3n+2)$.

(b) Puisque $u_0 = 0$,on a $u_n = (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + \ldots + (u_1 - u_0) = \sum_{k=0}^{k=n-1} (u_{k+1} - u_k)$.

Or $(u_{k+1} - u_k) = \frac{1}{6}(3k+2)$,

donc $u_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{1}{6}(3k+2) = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{k=n-1}(3k) + \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{k=n-1} 2 = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{k=n-1} k + \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{k=n-1} 1$.

Et pour finir : $u_n = \frac{1}{2}\frac{(n-1)n}{2} + \frac{n}{3} = n\left(\frac{1}{3} + \frac{n-1}{4}\right) = \frac{n(3n+1)}{12}$.

(c) Pour tout entier naturel n : $\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/2 & \frac{n(3n+1)}{12} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

Exercice 3 (facultatif)

1. (a) La dimension de l'image de f est son rang, qui est aussi le rang de C. Clairement le sous-espace engendré par les colonnes de C est également engendré par les deux première colonnes. De plus ces deux colonnes forment une famille libre. On en déduit que le rang de C (et donc celui de f) est égal à 2.

   D'après les deux premières colonnes de C, on a $f(e_1) = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5$ et $f(e_2) = e_4 + e_5$. Donc $e_2 + e_3 + e_4 = f(e_1 - e_2)$ et $e_4 + e_5 = f(e_2)$, ce qui prouve que les deux vecteurs $e_2 + e_3 + e_4$ appartiennent bien à l'image de $\text{Im}(f)$. De plus, ils ne sont pas colinéaires, donc forment une famille libre.

   Ainsi, $(e_2 + e_3 + e_4, e_4 + e_5)$ est une famille libre, constituée de 2 vecteurs de $\text{Im}(f)$, avec $\dim(\text{Im}(f)) = 2$.

   On en déduit que $\boxed{(e_2 + e_3 + e_4, e_4 + e_5) \text{ est une base de } \text{Im}(f)}$.

   (b) D'après le théorème du rang, on a $\dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Ker}(f)) = \dim(\mathbb{R}^5)$, soit (d'après la question précédente) : $2 + \dim(\text{Ker}(f)) = 5$. On en déduit que $\boxed{\dim(\text{Ker}(f)) = 3}$.

   D'après la matrice C, on a $f(e_2) = f(e_3) = f(e_4) = f(e_5)$. Donc $f(e_2 - e_3) = 0$, $f(e_3 - e_4) = 0$ et $f(e_4 - e_5) = 0$. Par conséquent, $e_2 - e_3$, $e_3 - e_4$ et $e_4 - e_5$ appartiennent à $\text{Ker}(f)$. Vérifions qu'ils forment une famille libre. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha(e_2 - e_3) + \beta(e_3 - e_4) + \gamma(e_4 - e_5) = 0$. Alors $\alpha e_2 + (-\alpha + \beta)e_3 + (-\beta + \gamma)e_4 - \gamma e_5 = 0$. Donc (puisque la famille (e_2, e_3, e_4, e_5) est libre) :

   $$\begin{cases} \alpha &= 0 \\ -\alpha + \beta &= 0 \\ -\beta + \gamma &= 0 \\ -\gamma &= 0 \end{cases}, \text{ et donc } \begin{cases} \alpha &= 0 \\ \beta &= 0 \\ \gamma &= 0 \end{cases}.$$

   Ainsi, la famille $(e_2 - e_3, e_3 - e_4, e_4 - e_5)$ est une famille libre, constituée de 3 vecteurs de $\text{Ker}(f)$, avec $\dim(\text{Ker}(f)) = 3$.

   On en déduit que $\boxed{(e_2 - e_3, e_3 - e_4, e_4 - e_5) \text{ est une base de } \text{Ker}(f)}$.

   Remarque : ce n'était pas la seule réponse possible. $\text{Ker}(f)$ *admet une infinité de bases différentes.*

2. (a) Par linéarité de f, on $f(u) = f(e_2) + f(e_3) + f(e_4)$, soit, d'après la matrice C : $f(u) = (e_1 + e_5) + (e_1 + e_5) + (e_1 + e_5)$. D'où $\boxed{f(u) = 3e_1 + 3e_5}$.

   De même : $f(v) = f(e_1) + f(e_5) = (e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5) + (e_1 + e_5)$, soit $\boxed{f(v) = 2e_1 + e_2 + e_3 + e_4 +}$

   Ensuite, toujours par linéarité de f, on a $f(u - v) = f(u) - f(v) = (3e_1 + 3e_5) - (2e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + 2e_5) = e_1 - e_2 - e_3 - e_4 + e_5$, i.e $\boxed{f(u - v) = v - u}$.

   Et de même : $f(u + 3v) = f(u) + 3f(v) = (3e_1 + 3e_5) + 3(2e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + 2e_5) = 9e_1 + 3e_2 + 3e_3 + 3e_4 + 9e_5$, i.e $\boxed{f(u + 3v) = 3u + 9v = 3(u + 3v)}$.

   (b) Comme $\text{Ker}(f) \neq \{0\}$, on sait déjà que 0 est valeur propre de f. L'espace propre associé est $\text{Ker}(f) = Vect(e_2 - e_3, e_3 - e_4, e_4 - e_5)$.

   De plus, d'après la question précédente, on a $f(u - v) = -(u - v)$, avec $u - v$ qui est un vecteur non nul. Ceci montre que -1 est vecteur propre de f. Et de même,

$f(u+3v) = 3(u+3v)$, avec $u+3v$ qui est un vecteur non nul. Donc 3 est également vecteur propre de f.

Déterminons les espaces propres associés aux valeurs propres -1 et 3. On sait que ces deux espaces sont chacun au moins de dimension 1. De plus, comme la somme des dimensions des espaces propres doit être inférieure ou égale à 5 (car $\dim(\mathbb{R}^5) = 5$) et que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3$, ils ne peuvent être de dimension strictement plus grande que 1.

Par conséquent, ils sont chacun de dimension 1. L'espace propre associé à la valeur propre -1 est simplement $Vect(u-v)$ et celui associé à la valeur propre 3 est $Vect(u+3v)$.

Enfin, comme la somme des dimensions des 3 espaces propres trouvés est égale à 5, il ne peut pas y avoir d'autres valeurs propres.

$\boxed{\text{Conclusion : } f \text{ admet exactement 3 valeurs propres, qui sont } 0, -1 \text{ et } 3. \text{ Les espaces propres associés sont respectivement : } Vect(e_2-e_3, e_3-e_4, e_4-e_5),\ Vect(u-v) \text{ et } Vect(u+3v).}$

(c) On a vu à la question précédente que la somme des dimensions des espaces propres de f était 5, comme $\dim(\mathbb{R}^5)$. Ceci prouve que f est diagonalisable, et donc que $\boxed{C \text{ est diagonalisable}}$ également.

De plus, toujours d'après la question précédente, on a $C = RDR^{-1}$ avec $\boxed{D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$

et $\boxed{R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}}$.

3. (a) Il suffit de faire le calcul :

$$\begin{aligned} D(D+I)(D-3I) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Soit : $\boxed{D(D+I)(D-3I)=0}$.

(b) La matrice D est la matrice de f dans la base (constituée de vecteurs propres) $(e_2 - e_3, e_3 - e_4, e_4 - e_5, u - v, u + 3v)$. Comme $D(D+I)(D-3I) = 0$, on en déduit que $f \circ (f + Id) \circ (f + 3Id) = 0$ et donc (en réinterprétant matriciellement, mais cette fois dans la base $\mathcal{B}$) : $C(C+I)(C-3I) = 0$.

En développant, ceci se réécrit $C^3 - 2C^2 - 3C = 0$, ce qui prouve que $\boxed{P \text{ est un polynôme annulateu}}$

Remarque : on pouvait le faire purement matriciellement. Il suffit de développer $D(D+I)(D-3I) = 0$, puis de remplacer D par $R^{-1}CR$, avant de multiplier par R (à gauche) et R^{-1} à droite.

4. (a) Soit $n \geqslant 1$ quelconque.

En remplaçant X par 0 dans l'équation $X^n = (X^3 - 2X^2 - 3X)Q_n(X) + a_nX^2 + b_nX + c_n$, on obtient $c_n = 0$.

De même, en remplaçant X par -1, on obtient : $(-1)^n = a_n - b_n + c_n$. Et en remplaçant X par 3, on obtient : $3^n = 9a_n + 3b_n + c_n$.

On résout alors le système formé par les 3 équations obtenues ci-dessus :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} & & & & c_n & = & 0 \\ a_n & - & b_n & + & c_n & = & (-1)^n \\ 9a_n & + & 3b_n & + & c_n & = & 3^n \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccc} & & c_n & = & 0 \\ a_n & - & b_n & = & (-1)^n \\ 9a_n & + & 3b_n & = & 3^n \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{ccccc} & & c_n & = & 0 \\ a_n & - & b_n & = & (-1)^n \\ 12a_n & & & = & 3^n + 3(-1)^n \end{array}\right.$$

Par conséquent, on a $\boxed{a_n = \frac{1}{12}\big(3^n + 3(-1)^n\big)}$, puis en reportant dans la deuxième ligne : $\boxed{b_n = \frac{1}{12}\big(3^n - 9(-1)^n\big)}$, et toujours $\boxed{c_n = 0}$.

(b) D'après la relation donnée en préambule de la question 4, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$C^n = (C^3 - 2C^2 - 3C)Q_n(C) + a_nC^2 + b_nC + c_nI$$

En remplaçant $C^3 - 2C^2 - 3C$ par 0 (question 3.(b)), et a_n, b_n et c_n par leurs valeurs respectives (question précédente), on obtient alors :

$$\boxed{C^n = \frac{1}{12}\big(3^n + 3(-1)^n\big)C^2 + \frac{1}{12}\big(3^n - 9(-1)^n\big)C}$$