Corrigé du DS n°2

le 18/10/2024
Durée : 4h

— L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
— La clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une grande part dans la notation.
— Le résultat d'une question peut être admis afin de traiter une question suivante.
— On encadrera le résultat de chaque question.

Exercice 1

1. (a) Notons U_1 l'événement «le premier tirage a lieu dans $\mathcal{U}_1$»et U_2 l'événement «le premier tirage a lieu dans $\mathcal{U}_2$». Ces événement forment un système complet d'événements ; ona donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(X=1) = P(U_1)P_{U_1}(X=1) + P(U_2)P_{U_2}(X=1) = \frac{1}{2}\,\frac{3}{5} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{5} = \frac{2}{5}\ .$$

Comme la variable aléatoire X_1 prend les valeurs 0 et 1, on en déduit qu'elle suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{2}{5}$.

(b) On déduit de la question précédente que $E(X_1) = \frac{2}{5}$ et $V(X_1) = \frac{2}{5}\,\frac{3}{5} = \frac{6}{25}$.

2. (a) On remarque tout d'abord que

$$[X_2=0] \cap [Z=0] = [X_2=0] \cap [X_1=0]\ .$$

On a donc

$$P\left([X_2=0] \cap [Z=0]\right) = P\left([X_1=0] \cap [X_2=0]\right) = P(X_1=0)P_{[X_1=0]}(X_2=0)\ .$$

Or, si l'événement $[X_1 = 0]$ s'est produit, le second tirage a lieu dans l'urne $\mathcal{U}_2$; donc $P_{[X_1=0]}(X_2=0) = \frac{4}{5}$. On obtient ainsi :

$$P\left([X_2=0] \cap [Z=0]\right) = \frac{3}{5}\,\frac{4}{5} = \frac{12}{25}\ .$$

(b) Remarquons que Z peut prendre les valeurs 0, 1 et 2.
En procédant comme à la question précédente, on obtient :
$P\left([X_2=0] \cap [Z=1]\right) = P\left([X_2=0] \cap [X_1=1]\right) = P(X_1=1)P_{[X_1=1]}(X_2=0) = \frac{2}{5}\,\frac{2}{5} = \frac{4}{25}$;
$P\left([X_2=0] \cap [Z=2]\right) = P(\emptyset) = 0$;
$P\left([X_2=1] \cap [Z=0]\right) = P(\emptyset) = 0$;
$P\left([X_2=1] \cap [Z=1]\right) = P\left([X_2=1] \cap [X_1=0]\right) = P(X_1=0)P_{[X_1=0]}(X_2=1) = \frac{3}{5}\,\frac{1}{5} = \frac{3}{25}$;
$P\left([X_2=1] \cap [Z=2]\right) = P\left([X_2=1] \cap [X_1=1]\right) = P(X_1=1)P_{[X_1=1]}(X_2=1) = \frac{2}{5}\,\frac{3}{5} = \frac{6}{25}$.

$X_2 \diagdown Z$	0	1	2
0	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$	0
1	0	$\frac{3}{25}$	$\frac{6}{25}$

3. (a) On applique la formule des probabilités totales avec le s.c.e. formé par $[X_1 = 0]$ et $[X_1 = 1]$:

$$P(X_2 = 0) = P(X_1 = 0)P_{[X_1=0]}(X_2 = 0) + P(X_1 = 1)P_{[X_1=1]}(X_2 = 0) = \frac{3}{5}.\frac{4}{5} + \frac{2}{5}.\frac{2}{5} = \frac{16}{25}\ ;$$

et donc $P(X_2 = 1) = \dfrac{9}{25}$.
Remarque :on pouvait également utiliser la loi du couple (X_2, Z) pour en déduire la marginale X_2.
On en déduit $E(X_2) = \dfrac{9}{25}$ et $V(X_2) = \dfrac{9}{25}.\dfrac{16}{25} = \dfrac{144}{625}$.

(b) On a $P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]) = P(X_1 = 0)P_{[X_1=0]}(X_2 = 0) = \dfrac{3}{5}\dfrac{1}{5} = \dfrac{3}{25}$.
Et $P(X_1 = 0)P(X_2 = 0) = \dfrac{3}{5}\dfrac{16}{25} = \dfrac{48}{125}$.
Or $\dfrac{3}{25} = \dfrac{15}{125} \neq \dfrac{48}{125}$. On a donc $P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]) \neq P(X_1 = 0)P(X_2 = 0)$.
Conclusion : les variables aléatoires X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

(c) Z prend les valeurs 0, 1 et 2.
On a $[Z = 0] = [X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]$; donc

$$P(Z = 0) = P(X_1 = 0)P_{[X_1=0]}[X_2 = 0] = \frac{3}{5}.\frac{4}{5} = \frac{12}{25}\ .$$

On a $[Z = 1] = ([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1]) \cup ([X_1 = 1] \cap [X_2 = 0])$ (union disjointe) ; donc

$$P(Z = 1) = P(X_1 = 0)P_{[X_1=0]}[X_2 = 1] + P(X_1 = 1)P_{[X_1=1]}[X_2 = 0] = \frac{3}{5}.\frac{1}{5} + \frac{2}{5}.\frac{2}{5} = \frac{7}{25}\ .$$

On a $[Z = 2] = [X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]$; donc

$$P(Z = 2) = P(X_1 = 1)P_{[X_1=1]}[X_2 = 1] = \frac{2}{5}.\frac{3}{5} = \frac{6}{25}\ .$$

Remarque : on pouvait également utiliser la loi du couple (X_2, Z) pour en déduire la marginale Z.

(d) On déduit de la question précédente :

$$E(Z) = 0.\frac{12}{25} + 1.\frac{7}{25} + 2.\frac{6}{25} = \frac{19}{25}\ .$$

Puis

$$E(Z^2) = 0^2.\frac{12}{25} + 1^2.\frac{7}{25} + 2^2.\frac{6}{25} = \frac{31}{25}\ ;$$

et enfin

$$V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = \frac{31}{25} - \frac{19^2}{25^2} = \frac{775}{625} - \frac{361}{625} = \frac{414}{625}\ .$$

4. L'événement «la première boule tirée est verte»est l'événement $[X_1 = 0]$. La probabilité que cette boule verte provienne d'un tirage dans l'urne $\mathcal{U}_1$ est $P_{[X_1=0]}(U_1)$ et on a

$$P_{[X_1=0]}(U_1) = \frac{P(U_1 \cap [X_1 = 0])}{P([X_1 = 0])} = \frac{P(U_1)P_{U_1}[X_1 = 0])}{P([X_1 = 0])}) = \frac{\frac{1}{2}.\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{3}\ .$$

5. (a) On utilise le tableau établi dans la question 2. :

$$E(X_2Z) = 0 \times 0 \times \frac{12}{25} + 0 \times 1 \times 0 + 0 \times 2 \times \frac{12}{25} + 1 \times 0 \times 0 + 1 \times 1 \times \frac{3}{25} + 1 \times 2 \times \frac{6}{25} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}\ .$$

(b) On a $cov(X_2, Z) = E(X_2Z) - E(X_2)E(Z) = \frac{3}{5} - \frac{9}{25}\frac{19}{25} = \frac{375}{625} - \frac{171}{625} = \frac{204}{625}$.

(c) On a

$$cov(X_1, X_2) = cov(Z - X_2, X_2) = cov(Z, X_2) - cov(X_2, X_2) = cov(Z, X_2) - V(X_2) \ ;$$

et donc

$$cov(X_1, X_2) = \frac{204}{625} - \frac{144}{625} = \frac{60}{625}$$

Remarque : on retrouve le fait que X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

(d) On a

$$V(Z) = V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) + 2cov(X_1, X_2) \ ;$$

ce qui donne

$$V(Z) = \frac{6}{25} + \frac{144}{625} + 2\frac{60}{625} = \frac{150 + 144 + 120}{625} = \frac{414}{625} \ .$$

On retrouve bien le résultat de la question 3.

6. (a)

```
def simulBer(p):
    a  = rd.random()
    if a < p:
        return 1
    else:
        return 0
```

(b)

```
def simulZ() :
   # on effectue tout d'abord une première épreuve de Bernoulli
   #pour décider de l'urne dans laquelle on effectue le premier tirage.
   X=simulBer(0.5)
   if X==1 : # alternative correspondant à un tirage dans l'urne 1
       X1 = simulBer(3/5)
   else : # alternative correspondant à un tirage dans l'urne 2
       X1 = simulBer(1/5)

   #On effectue maintenant le deuxième tirage
   if X1 == 1 :
       X2 = simulBer(3/5)
   else :
       X2 = simulBer(1/5)

   Z = X1 + X2
   return Z
```

(c)

```
S = 0
for i in range(10000):
    S = S + simulZ()

moy = S/10000
print(moy)
```

(d) Le résultat obtenu est bien proche de $E(Z) = 0,76$.

Exercice 2

1.

```
n = 100
u = 0.5
for in range(1,n+1): # ou bien  range(0,n)
     u = u - u**2

print(u)
```

2. **Étude la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.**
   (a) Soit $x \in]0,1[$.
   Remarquons que $x - x^2 = x(x-1)$.
   Or $x \in]0,1[$ et $(1-x) \in]0,1[$.
   Donc $x(1-x) \in]0,1[$ et donc $x - x^2 \in]0,1[$.

   (b) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ la propriété : $u_n \in]0,1[$.
   — Initialisation : d'après l'énoncé, $u_0 = a \in]0,1[$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
   — Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie.
   Par hypothèse de récurrence, $u_n \in]0,1[$.
   D'après le résultat de la question (a), cela implique que $u_n - u_n^2 \in]0,1[$; c'est à dire $u_{n+1} \in]0,1[$.
   Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
   — Conclusion : en application du principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$.
   $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leq 0$.
   Conclusion : (u_n) est décroissante.

   (d) La suite (u_n) est décroissante et minorée (par 0) ; donc elle converge.
   Comme la fonction $x \mapsto x - x^2$ est continue, d'après le théorème du point fixe, cette limite est solution de l'équation $x = x - x^2$, c'est à dire $x^2 = 0$.
   On en déduit que la limite de (u_n) est 0.

3. **Étude de la série de terme général u_n^2.**
   (a) On a $u_{k+1} = u_k - u_k^2$; donc $u_k^2 = u_k - u_{k+1}$.

   (b) Pour $n \in \mathbb{N}$,
   $$\sum_{k=0}^{n} u_k^2 = \sum_{k=0}^{n} u_k - u_{k+1} \ .$$
   On remarque qu'il s'agit d'une somme télescopique :
   $$\sum_{k=0}^{n} u_k^2 = u_0 - u_1 + u_1 - u_2 + \cdots + u_{n-1} - u_n + u_n - u_{n+1} = u_0 - u_{n+1} \ .$$

   (c) D'après la question précédente, et comme (u_n) a pour limite 0,
   $$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k^2 \ = \ u_0 \ .$$
   On en conclut que la la série de terme général u_n^2 est convergente et que sa somme vaut $u_0 = a$.

4. **Étude de la série de terme général u_n.**

(a) Pour $n \geq 0$,
$$\sum_{k=0}^{n} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = \sum_{k=0}^{n} \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) \ .$$
On reconnaît là aussi une somme télescopique, ce qui donne
$$\sum_{k=0}^{n} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = \ln(u_1)-\ln(u_0)+\ln(u_2)-\ln(u_1)+\cdots+\ln(u_{n+1})-\ln(u_n) = \ln(u_{n+1})-\ln(u_0) \ .$$

(b) Comme (u_n) a pour limite 0,
$$\lim_{n\to+\infty} \ln(u_{n+1}) \ = -\infty \ ;$$
donc
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) \ = -\infty \ .$$
On en conclut que la série de terme général $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est divergente et donc également la série de terme général $-\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

(c) On a, pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n - u_n^2}{u_n} = 1 - u_n$; donc $-\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = -\ln(1-u_n)$.

(d) D'après la question précédente, et Comme (u_n) a pour limite 0,
$$\ln(1-u_n) \sim -u_n \ .$$
Donc, d'après la question précédente,
$$-\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \sim u_n \ .$$
Remarquons qu'il s'agit de suite à termes positifs car pour tout n, $u_n > 0$ d'une part et d'autre part, $u_{n+1} < u_n$ donc $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) < 0$.
On déduit du théorème de comparaison des séries à termes positifs que la série de terme général u_n est de même nature que la série de terme général $-\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.
En utilisant le résultat de la question (b), on en conclut que la série de terme général u_n est divergente.

Exercice 3

1. L'ensemble des valeurs que peut prendre X, c'est à dire $X(\Omega)$, est l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à 1 auquel il faut rajouter $\{0\}$, dans le cas où l'on n'obtient pas de boule noire.
2. Soit $n \geq 1$. On note A_n l'événements : " le n-ième tirage a donné une boule blanche ".
On a $(X=1) = \overline{A_1}$ et, pour $n \geq 2$,
$$(X=n) = A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap \overline{A_n} \ .$$
Pour calculer la probabilité de $(X=n)$, on va tout d'abord s'intéresser aux événements $B_{n-1} = A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}$, pour $n \geq 2$.
On remarque que si B_{n-1} est réalisé, on a rajouté $n-1$ boules blanches, donc l'urne en contient n, et donc :
$$P_{B_{n-1}}(A_n) = \frac{n}{n+1} \ .$$
Montrons maintenant par récurrence $\mathcal{P}_n$: $P(B_n) = \frac{1}{n+1}$, pour $n \geq 1$.

— $P(B_1) = 1/2$ donc $\mathcal{P}_1$ est vérifiée.
— Soit $n \geq 1$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vérifiée. On a alors :

$$P(B_{n+1}) = P(B_n \cap A_{n+1}) = P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{n+1} \times \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n+2} \ ;$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée.
— En conclusion, $\mathcal{P}_n$ est vérifiée quel que soit $n \geq 1$.

On en déduit :

$$P(X = n) = P(B_{n-1} \cap \overline{A_n}) = P(B_{n-1}) \times P_{B_{n-1}}(\overline{A_n}) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n+1} \ .$$

3. On met au même dénominateur :

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} = \frac{(n+1)a + nb}{n(n+1)} = \frac{(a+b)n + a}{n(n+1)} \ ;$$

et donc $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}$ quel que soit n ssi $a + b = 0$ et $a = 1$, c'est à dire $a = 1$ et $b = -1$.
On a donc :

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \ .$$

4. Pour $n \geq 1$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} P(X = k) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \ ;$$

on remarque une somme télescopique, ce qui donne

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \ .$$

5. En utilisant la question précédente on obtient :

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = 1 \ ;$$

Donc la série de terme général $P(X = n)$ converge et

$$S_n = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) = 1 \ .$$

Comme on doit avoir $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) = 1$, on en déduit $P(X = 0) = 0$.
Donc l'événement " Obtenir une boule noire en temps fini" est presque sûr.

6. Afin d'étudier l'existence de l'espérance de X, il faut étudier la convergence absolue de la série de terme général $nP(X = n)$, $n \geq 1$. Or $|nP(X = n)| = \dfrac{1}{n+1}$.
On remarque que pour $n \geq 1$, $2n \geq n + 1$, donc $\dfrac{1}{2n} \leq \dfrac{1}{n+1}$.
Or la série de terme général $\dfrac{1}{n}$ diverge, et donc celle de terme général $\dfrac{1}{2n}$ également. Donc par comparaison la série de terme général $\dfrac{1}{n+1}$ diverge.
On en conclut que la variable aléatoire X n'admet pas d'espérance.

Exercice 4

Adapté de EDHEC E 2009

1. (a) Comme les valeurs possibles de X et de Y sont $\mathbb{N}^*$, $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
Soit $k \in \mathbb{N}$,

$$P(Z > k) = P([X > k] \cap [Y > k]) \ ;$$

et comme X et Y sont indépendantes,

$$P(Z > k) = P([X > k]) \ P([Y > k]) \ .$$

Calculons la valeur commune de $P([X > k])$ et $P([X > k])$. Pour cela, on calcule la probabilité de l'événement contraire :

$$P([X \leq k]) = \sum_{i=1}^{k} p \, q^{k-1} = p \, \frac{1-q^k}{1-q} = 1 - q^k \ .$$

Remarque : on aurait pu aussi utiliser le fait que X représente le rang du premier succès lors d'une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes de probabilité de succès p. L'événement $[X > k]$ est l'événement “échecs lors des k premières épreuves”, et a donc pour probabilité q^k.
On en conclut que, pour tout entier naturel k, $P(Z > k) = q^{2k}$.

(b) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a $[Z > k-1] = [Z = k] \cup [Z > k]$ (union disjointe), donc

$$P(Z > k-1) = P(Z = k) + P(Z > k) \ ;$$

et donc

$$P(Z = k) = P(Z > k-1) - P(Z > k) \ .$$

(c) La variable aléatoire Z prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et en utilisant les deux questions précédentes on obtient, pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P(Z = k) = q^{2(k-1)} - q^{2k} = \left(q^2\right)^{k-1}\left(1-q^2\right) = \left(1-(1-q^2)\right)^{k-1}\left(1-q^2\right) \ .$$

On en conclut que Z suit une loi géométrique de paramètre $1 - q^2$.

2. (a) Si la valeur de $X(\omega)$ est paire (non nulle car $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$) alors la valeur de $X(\omega)/2$ est un entier non nul.
Si la valeur de $X(\omega)$ est impaire alors la valeur de $X(\omega)+1$ est paire non nulle et $[X(\omega)+1]/2$ est un entier non nul.
Conclusion : $\boxed{T \text{ prend des valeurs entières non nulles.}}$

(b) Soit k un entier naturel non nul.
Alors $2k \in X(\Omega)$ et est pair. Donc $2k/2 = k \in T(\Omega)$.
Donc $T(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
Conclusion : $\boxed{T(\Omega) = \mathbb{N}^*}$

(c) $(T = k)$ peut être réalisé avec X pair, auquel cas $X = 2k$, ou avec X impair, auquel cas $X = 2k-1$ (pour que $\dfrac{1+X}{2}$ soit égal à T).

Conclusion : $\boxed{(T = k) = (X = 2k) \cup (X = 2k-1)}$ et ces 'evénements sont incompatibles.
(Remarquons que pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a bien $2k \in \mathbb{N}^*$ et $2k-1 \in \mathbb{N}^*$).
On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{P}\left(T=k\right) & = & P(X=2k)+P(X=2k-1) \\
& = & q^{2k-1}p+q^{2k-2}p \\
& = & q^{2k-2}p\left(1+q\right) \\
& = & q^{2k-2}\left(1-q\right)\left(1+q\right) \\
& = & q^{2(k-1)}\left(1-q^2\right)
\end{array}$$

Conclusion : $\boxed{T \text{ suit également une loi } \mathcal{G}\left(1-q^2\right), \text{ comme } Z}$.

(d) Comme T suit une loi $\mathcal{G}\left(1-q^2\right)$,
$$E(T)=\frac{1}{1-q^2}\ .$$

3. Simulation informatique.

(a)
```python
import numpy.random() as rd
def simulT(p):
    n=1
    while rd.random()>p:
        n = n+1

    if n%2 == 0    :
        T = n//2
    else :
        T = (n+1)/2
    return T
```

(b) Ce programme simule 10000 fois la variable aléatoire T (avec $p=0,4$) et affiche la valeur de la moyenne empirique obtenue. Cette valeur fournit une approximation de l'espérance de T. Pour $p=0,4$, on a obtenu :
$$E(T)=\frac{1}{1-q^2}=\frac{1}{1-(6/10)^2}=\frac{100}{64}\ .$$
En effectuant la division, on trouve $\frac{100}{64}\simeq 1,56$, ce qui est cohérent avec la moyenne empirique obtenue.