DS n°6

le 20/12/2025
Durée : 4h

— L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
— La clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une grande part dans la notation.
— Le résultat d'une question peut être admis afin de traiter une question suivante.
— On encadrera le résultat de chaque question.

Exercice 1 :

Un industriel fabriquant des bijoux dispose d'une base de données qui comprend trois tables : une table **Produits**, une table **Clients** et une table **Commandes**.
Les attributs des tables sont :
— Clients : (Cle INT, RaisonSociale TEXT , Adresse TEXT, Ville TEXT) ;
— Commandes : (Cle INT, Client INT , Bijou INT, Date INT)
— Produits : (Cle INT , Nom TEXT, Prix FLOAT)
Dans chaque table, Cle est une clef primaire. Dans Commandes, Client est une clef étrangère qui référence la clé primaire Cle de Clients. Dans Commandes, Bijou est une clef étrangère qui référence la clé primaire Cle de Produits.

1. Écrire en langage SQL les requêtes permettant d'obtenir les réponses aux questions suivantes :
   (a) Quel est le prix du collier "Emeraude" ?
   (b) Quel est le nombre de produits référencés ?
   (c) Quel est le prix moyen d'un produit ?
   (d) Donner la liste des produits (leur nom) commandés le 15 décembre 2025 (noté 20151225).
   (e) Quelle est la liste des produits commandés par la bijouterie "Gautheron" (cette chaîne de caractère est sa raison sociale) ?
2. Que font les commandes suivantes :
   (a)
   ```
   INSERT INTO Produits  (Cle   , Nom   , Prix  )
   VALUES (200 , 'Bague Saphir', 245.90)
   ```
   (b)
   ```
   DELETE FROM Commandes
   WHERE Date < 20220101
   ```
   (c)
   ```
   UPDATE Produit
   SET Prix = Prix * 0.95
   WHERE Prix > 1000
   ```

Exercice 2

On considère les suites $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ v_0 &= 0 \\ w_0 &= 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \geq 0, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= 2u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} &= v_n + w_n \\ w_{n+1} &= -u_n + v_n + w_n \end{cases}.$$

On note :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et, pour } n \geq 0, \ X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}.$$

Éléments propres d'une matrice

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice dans la base canonique.

1. Montrer que $(A - 2I_3)(A - I_3)^2 = 0_3$.
2. En déduire les valeurs propres possibles de A.
3. En déduire que la matrice A est inversible.
4. Déterminer les sous-espaces propres de f (on déterminera une base de chacun de ces sous-espaces propres).
5. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Trigonalisation de A

On considère les éléments suivants de $\mathbb{R}^3$: $b_1 = (0,1,1)$, $b_2 = (1,1,0)$ et $b_3 = (0,0,1)$.

6. Montrer que $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
7. Montrer que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est :
$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
8. On note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à $\mathcal{B}$.
Déterminer P et vérifier que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
9. Déterminer la relation entre A, P, T, P^{-1}.

Calcul des puissances de T et expression de u_n, v_n, w_n

10. On note $T = N + D$, où D est une matrice diagonale et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Déterminer D et vérifier que N et D commutent.
11. Que vaut N^n pour un entier $n \geq 2$?
12. Déduire de ce qui précède une expression de T^n (on donnera chacun de ses coefficients).
13. Pour $n \in \mathbb{N}$, établir une relation entre X_{n+1}, A et X_n.
14. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de X_n en fonction de A, n et X_0.
15. Établir, pour $n \in \mathbb{N}$, une relation entre A^n d'une part, T^n, P et P^{-1} d'autre part.
16. Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n, v_n, w_n en fonction de n.

Exercice 3 :

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A.

1. *diagonalisation de la matrice A*
   (a) Calculer $(A-I)(A-2I)(A-3I)$. En déduire les valeurs propres possibles de la matrice A.
   (b) Déterminer les valeurs propres de f et pour chacune une base du sous espace propre associé.
   (c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
   (d) Déterminer une matrice P et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. On rangera les coefficients diagonaux de D par ordre croissant et on prendra la première ligne de P égale à $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
2. *Ensembles des matrices qui commutent avec A*
   On note $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ l'ensemble des matrice qui commutent avec A :
   $$\mathcal{C}_{\mathcal{A}} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ AM = MA\} \ .$$
   (a) Montrer que $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3$.
   (b) Montrer que, pour $M \in \mathcal{M}_3$, $AM = MA$ si et seulement si $DP^{-1}MP = P^{-1}MPD$.
   (c) Déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec D. On cherchera une telle matrice sous la forme $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.
   (d) En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est l'ensemble des matrices qui s'écrivent $P\Delta P^{-1}$, où Δ est une matrice diagonale.

Exercice 4

1. Montrer que, si f désigne un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ diagonalisable, alors l'endomorphisme f^2 est aussi diagonalisable.
   On rappelle que $f^2 = f \circ f$.

   On se propose dans la suite de montrer que la réciproque de cette assertion est fausse.
   Pour ce faire, on considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}$.
   On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. (a) Déterminer la matrice A^2 puis établir que $A^4 = I$. En déduire les valeurs propres possibles de la matrice A .
   (b) Donner une base (u) de $\ker(g - Id)$.
   (c) Déterminer $\ker(g + Id)$.
   (d) En déduire que g n'est pas diagonalisable.
3. (a) Résoudre l'équation , $A^2X = -X$, d'inconnue le vecteur X élément de $\mathcal{M}_{3;1}(\mathbb{R})$, et en déduire une base $(v; w)$ de $\ker(g^2 + Id)$.
   (b) Montrer que la famille $(u; v; w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Écrire la matrice de g^2 dans la base $(u; v; w)$ et conclure.