DS n°6

le 20/12/2025
Durée : 4h

— L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
— La clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une grande part dans la notation.
— Le résultat d'une question peut être admis afin de traiter une question suivante.
— On encadrera le résultat de chaque question.

Exercice 1 :

1. (a) `SELECT Prix FROM Produits WHERE Nom = 'Emeraude'`

   (b) `SELECT COUNT(*) FROM Produits`

   (c) `SELECT AVG(Prix) FROM Produits`

   (d)
   ```
   SELECT Prod.Nom
   FROM Produits AS Prod INNER JOIN Commandes AS Com
                         ON Prod.Cle = Com.Bijou
   WHERE Date = 20251215
   ```

   (e)
   ```
   SELECT Prod.Nom
   FROM Produits AS Prod INNER JOIN Commandes AS Com INNER JOIN Clients AS Cl
                   ON Prod.Cle = Com.Bijou AND Com.Client = Cl.Cle
   WHERE RaisonSociale = 'Gautheron'
   ```

2. (a) Cette commande insère dans la table Produits un nouveau bijou appelé 'Bague Saphir', coûtant 245.90 euros, avec la clef 200.

   (b) Cette commande efface toutes les commandes antérieures au premier janvier 2022.

   (c) Cette commande met à jour la table Produit en baissant de 5% les prix des bijoux dont le prix était supérieur à 1000 euros.

Exercice 2

Éléments propres d'une matrice

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice dans la base canonique.

1.

$$\begin{aligned}(A-2I_3)(A-I_3)^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

2. On déduit de la question précédente que le polynôme $(X-2)(X-1)^2$ est un polynôme annulateur de A.
   Les racines de ce polynôme sont 1 et 2.
   Les valeurs propres possibles de A sont donc 1 et 2 : $sp(A) \subset \{1, 2\}$.
3. La matrice A est inversible car 0 n'est pas valeur propre.
4. — Valeur propre 1
   On résout $(A - I_3)X = 0$.
   Après calcul, 1 est bien valeur propre et $E_1(f) = vect((1, 1, 0))$.
   Ce vecteur constitue bien une base de $E_1(f)$ car il forme une famille libre (un seul vecteur, non nul).
   — Valeur propre 2
   On résout $(A - 2I_3)X = 0$.
   Après calcul, 2 est bien valeur propre $E_2(f) = vect((0, 1, 1))$.
   Ce vecteur constitue bien une base de $E_1(f)$ car il forme une famille libre (un seul vecteur, non nul).
5. La matrice A n'est pas diagonalisable car la somme des dimensions des sous-espaces propres de f est 2 et la dimension de $\mathbb{R}^3$ est 3.

Trigonalisation de A

6. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1\ b_1 + \lambda_2\ b_2 + \lambda_3\ b_3 = (0, 0, 0)$.
   On obtient un système de Cramer. On en déduit que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
   Conclusion : $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ est une famille libre à trois éléments dans $\mathbb{R}^3$ et donc une base de $\mathbb{R}^3$.
7. On a vu dans la première partie que $f(b_1) = 2b_1$; $f(b_2) = b_2$.
   On calcule :
   $$A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ;$$
   donc $f(b_3) = (1, 1, 1) = (1, 1, 0) + (0, 0, 1) = b_2 + b_3$.
   On en déduit la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$: $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. On a $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   On calcule :
   $$P \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \ ;$$
   et donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
9. D'une part T est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
   D'autre part, d'après la formule du changement de base, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ s'écrit $P^{-1}AP$.
   Conclusion : $T = P^{-1}AP$.

Calcul des puissances de T et expression de u_n, v_n, w_n

10. On a $D = T - N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
    $DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $ND = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
    Donc N et D commutent.
11. On a $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
    Pour un entier $n \geq 2$, $N^n = N^2 N^{n-2} = 0_3 N^{n-2} = 0_3$.
12. Comme N et D commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton :
    $$T^n = (N + D)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} \ .$$
    En utilisant le résultat de la question précédente :
    $$T^n = D^n \ + \ n \ N \ D^{n-1} \ = \ \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
13. Pour $n \in \mathbb{N}$,
    $$AX_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u_n - v_n + w_n \\ v_n + w_n \\ -u_n + v_n + w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ {}_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1} \ .$$
14. On en déduit, par une récurrence évidente, que pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
15. On a vu que $A = PTP^{-1}$.
    Montrons par récurrence, que, pour $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PT^nP^{-1}$. Initialisation : Pour $n = 0$, $A^0 = I_3$ et $PT^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = I_3$.
    Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
    Supposons que pour un entier n on ait $A^n = PT^nP^{-1}$.
    On a alors
    $$A^{n+1} = AA^n \ ;$$

ce qui donne, en utilisant l'hypothèse de récurrence et $A = PTP^{-1}$:

$$A^{n+1} = A = PTP^{-1}PT^nP^{-1} = PT^{n+1}P^{-1}$$

En application du principe de récurrence on en conclut que pour tout entier n on a $A^n = PT^nP^{-1}$.

16. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant ce qui précède,

$$\begin{aligned}
X_n &= PT^nP^{-1}X_0 \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2^n \\ n+1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} n+1 \\ -2^n+n+1 \\ -2^n+1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi $u_n = n+1$, $v_n = -2^n+n+1$, $w_n = -2^n+1$.

Exercice 3 :

1. *Diagonalisation de la matrice A*

 (a)

$$\begin{aligned}(A-I)(A-2I)(A-3I) &= \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & -4 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

 On en déduit que le polynôme $(X-1)(X-2)(X-3)$ est un polynôme annulateur de A. Les racines de ce polynôme sont 1, 2 et 3.
 Conclusion : les valeurs propres possibles de la matrice A sont 1, 2 et 3.

 (b) On résout, pour $\lambda \in \{1,2,3\}$, l'équation $(A-\lambda I)X = 0_{3,1}$.
 Remarque : on résout l'équation sous forme matricielle et on reviendra à f, comme demandé dans l'énoncé, en conclusion.

 — E_1.

$$(A-I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcl} 3x-3y-2z &=& 0 \\ 2x-2y-2z &=& 0 \\ -x+y+2z &=& 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcll} 3x-3y-2z &=& 0 & \\ -2z &=& 0 & L_2 \leftarrow 3L_2-2L_1 \\ 4z &=& 0 & L_3 \leftarrow 3L_3+L_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& y \\ z &=& 0 \end{array}\right.$$

 Donc 1 est bien valeur propre de A (et donc de f) et le sous espace propre de f associé à la valeur propre 1 est : $E_1(f) = Vect\left((1,1,0)\right)$.
 De plus la famille constituée par le vecteur $(1,1,0)$ est libre (un seul vecteur non nul) et donc est une base de $E_1(f)$.

 — E_2.

$$(A-2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x-3y-2z &=& 0 \\ 2x-3y-2z &=& 0 \\ -x+y+z &=& 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcll} 2x-3y-2z &=& 0 & \\ 0 &=& 0 & L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ -y &=& 0 & L_3 \leftarrow 2L_3+L_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& z \\ y &=& 0 \end{array}\right.$$

 Donc 2 est bien valeur propre de A (et donc de f) et le sous espace propre de f associé à la valeur propre 2 est : $E_2(f) = Vect\left((1,0,1)\right)$.
 De plus la famille constituée par le vecteur $(1,0,1)$ est libre (un seul vecteur non nul) et donc est une base de $E_2(f)$.

— E_3.

$$(A-3I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x-3y-2z &=& 0\\ 2x-4y-2z &=& 0\\ -x+y &=& 0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcll} x-3y-2z &=& 0 & \\ 2y+2z &=& 0 & L_2\leftarrow L_2-2L_1\\ -2y-2z &=& 0 & L_3\leftarrow L_3+L_1\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3(-z)+2z=-z\\ y &=& -z\end{array}\right.$$

Donc 3 est bien valeur propre de A (et donc de f) et le sous espace propre de f associé à la valeur propre 3 est : $E_3(f)=Vect\left((-1,-1,1)\right)$.
De plus la famille constituée par le vecteur $(-1,-1,1)$ est libre (un seul vecteur non nul) et donc est une base de $E_3(f)$.

(c) L'endomorphisme f a trois valeurs propres distinctes et $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3. Donc f est diagonalisable.

(d) Dans la base $((1,1,0),(1,0,1),(1,1,-1))$, d'après les résultats de la question b), l'endomorphisme f a pour matrice :

$$D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

Remarque : comme l'énoncé spécifiait que la matrice P devait avoir (1 1 1) comme première ligne, on a utilisé le fait que $E_3(f)=Vect\left((-1,-1,1)\right)=Vect\left((1,1,-1)\right)$.
En notant P la matrice de passage de la base canonique à cette nouvelle base, on a :

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\ ;$$

et, d'après la formule de changement de base, $D=P^{-1}AP$; et donc $A=PDP^{-1}$.

2. *Ensembles des matrices qui commutent avec A*

(a) — On a $A0_3=0_3=0_3A$; donc $0_3\in\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$.
— Soit $M1$, M_2 dans $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ et λ_1,λ_2 deux réels.
Alors

$$A(\lambda_1M1+\lambda_2M_2)=\lambda_1AM1+\lambda_2AM_2\ .$$

Or M_1 et M_2 sont dans $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$; donc

$$A(\lambda_1M1+\lambda_2M_2)=\lambda_1M1A+\lambda_2M_2A=(\lambda_1M1+\lambda_2M_2)A\ .$$

Conclusion : $\lambda_1M1+\lambda_2M_2\in\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$

On en conclut que $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3$.

(b) On a, pour $M\in\mathcal{M}_3(R)$,

$$AM=MA\Leftrightarrow PDP^{-1}M=MPDP^{-1}\Leftrightarrow P^{-1}PDP^{-1}MP=P^{-1}MPDP^{-1}P\ ;$$

et donc

$$AM=MA\Leftrightarrow DP^{-1}MP=P^{-1}MPD\ .$$

Autrement dit : M commute avec A si et seulement si $P^{-1}MP$ commute avec D.

(c) On a

$$D\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ 3g & 3h & 3i \end{pmatrix} \ ,$$

et

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} a & 2b & 3c \\ d & 2e & 3f \\ g & 2h & 3i \end{pmatrix} \ .$$

Et donc $D\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} D$ ssi et seulement si

$$a = a \quad b = 2b \quad c = 3c$$

$$2d = d \quad 2e = 2e \quad 2f = 3f$$

$$g = 3g \quad 2h = 3h \quad 3i = 3i \ ;$$

c'est à dire si et seulement si ,

$$b = 0 \quad c = 0$$

$$d = 0 \qquad f = 0$$

$$g = 0 \quad h = 0 \qquad .$$

Les matrices qui commutent avec D sont donc les matrices diagonales.

(d) On déduit de la question (b) qu'une matrice M commute avec A ssi $P^{-1}MP$ commute avec D. Puison déduit de la question précédente que M commute avec A ssi $P^{-1}MP$ est diagonale ; c'est à dire s'il existe une matrice diagonale Δ telle que $P^{-1}MP = \Delta$, c'est à dire $M = P\Delta P^{-1}$.

Exercice 4

1. Si f, endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ est diagonalisable, sa matrice est diagonale D dans une base de vecteurs propres.
   La matrice de $f \circ f$ étant D^2, elle est encore diagonale.
   Conclusion : $\boxed{\text{si } f \text{ est diagonalisable alors } f^2 \text{ l'est aussi.}}$
   N.B. On pouvait aussi passer par :
   il existe une base de vecteurs propres (u, v, w) associés à des valeurs propres (α, β, γ)
   On aura alors $f \circ f(u) = f(f(u)) = f(\alpha u) = \alpha f(u) = \alpha^2 f(u)$ donc u est une vecteur propre de f associé à la valeur propre α^2 et de même pour v et w.
   Et on a donc (u, v, w) est une base de vecteurs propres de f^2
2. (a) On calcule
   $$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$
   Donc
   $$A^4 = \left(A^2\right)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   Conclusion : $\boxed{A^4 = I}$
   Donc $X^4 - 1$ est un polynôme annulateur de A.
   Ainsi, si α est valeur propre de A alors $\alpha^4 = 1$.
   On a alors $\alpha^2 = \pm 1$; ce qui donne $\alpha = \pm 1$.
   Conclusion : $\boxed{\text{Les seules valeurs propres possibles de } A \text{ sont } 1 \text{ et } -1}$

   (b) $(x, y, z) \in \ker(g - Id) \iff (A - I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$
   $$\iff \left\{ \begin{array}{ll} -x + 2y - z = 0 & \\ 2x - 6y + 4z = 0 & L_2 + 2L_1 \\ 3x - 8y + 5z = 0 & L_3 + 3L_1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} -x + 2y - z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \end{array} \right.$$
   $$\iff \left\{ \begin{array}{l} x = z \\ y = z \end{array} \right.$$
   Donc $\ker(g - Id) = \text{Vect}((1, 1, 1))$
   et avec $u = (1, 1, 1)$ la famille (u) est génératrice de $\ker(g - Id)$ et libre, donc base de $\ker(g - Id)$.

   (c) $(x, y, z) \in \ker(g + Id) \iff (A + I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$
   $$\iff \left\{ \begin{array}{ll} x + 2y - z = 0 & \\ 2x - 4y + 4z = 0 & L_2 - 2L_1 \\ 3x - 8y + 7z = 0 & L_3 - 3L_1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = 0 \\ -8y + 6z = 0 \\ -14y + 10z = 0 \end{array} \right.$$
   $$\iff \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = 0 \\ y = 3/4z \\ z = 0 \end{array} \right. \iff x = y = z = 0$$
   Conclusion : $\boxed{\ker(g + Id) = \{0\}}$ et -1 n'est donc pas valeur propre de g.

   (d) La somme des dimensions des sous espaces propres est donc $1 \neq 3$
   Conclusion : $\boxed{g \text{ n'est pas diagonalisable}}$

3. (a) Avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

on a $A^2X = -X \iff \left(A^2 + I\right) X = 0$

$\iff \begin{cases} 2x - 2y + 2z = 0 \\ 2x - 2y + 2z \quad = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \end{cases} \iff x = y - z$

donc $\ker\left(g^2 + \mathrm{Id}\right) = \mathrm{Vect}\left((1,1,0), (-1,0,1)\right)$ famille génératrice et libre (2 vecteurs non proportionnels) donc une base de $\ker\left(g^2 + Id\right)$

Conclusion : $\boxed{\text{avec } v = (1,1,0) \text{ et } w = (-1,0,1)}$

(b) On avait $u = (1,1,1)$.

On montre que la famille (u, v, w) est libre :

Soient x, y, z réels.

Si $xu + yv + zw = 0$ alors $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = -x \\ z = -x \end{cases}$ donc $x = y = z = 0$

Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l}\text{Donc } (u,v,w) \text{ est une famille libre de trois vecteurs de } \mathbb{R}^3 \\ \text{donc une base de } \mathbb{R}^3\end{array}}$

(c) On avait $g(u) = u$ donc $g^2(u) = g(u) = u$ vecteur propre de g^2 associé à 1.

v et w sont associée à -1

La matrice de g dans la base de vecteurs propres (u, v, w) est donc $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Comme un contre exemple suffit pour prouver qu'une propriété n'est pas universelle,

Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l} g^2 \text{ est diagonalisable et pourtant, } g \text{ ne l'est pas.} \\ \text{La réciproque était donc bien fausse}\end{array}}$