Corrigé du DS n°3 - Concours Blanc

le 08/11/2024
Durée : 4h

— L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
— La clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une grande part dans la notation.
— Le résultat d'une question peut être admis afin de traiter une question suivante.
— On encadrera le résultat de chaque question.

Exercice 1

1.
$$Q.Q = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & -1 & -2\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & -1 & -2\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} = I$$

Donc Q est inversible, et on inverse est $Q^{-1} = Q$.

2. Calculons :

$$\begin{aligned}D &= QMQ\\
&= \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & -1 & -2\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\0 & 0 & \frac{1}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & -1 & -2\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & -\frac{1}{2} & 0\\0 & 0 & \frac{1}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & -1 & -2\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \frac{1}{2} & 0\\0 & 0 & \frac{1}{4}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

D est bien une matrice diagonale.
Par ailleurs, puisque $Q = Q^{-1}$ et $QQ = I$, il vient :

$$QDQ = Q(QMQ)Q = M.$$

3. Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = QD^nQ$.
   — L'égalité est vraie pour $n = 0$ car $M^0 = I$ et $QD^0Q = QIQ = QQ = I$.
   — Supposons que $M^n = QD^nQ$ pour un entier $n \geq 0$ fixé et montrons que $M^{n+1} = QD^{n+1}Q$.
   On a :

$$\begin{aligned}M^{n+1} &= MM^n\\
&= MQD^nQ\\
&= QDQQD^nQ\\
&= QDD^nQ\\
&= QD^{n+1}Q.\end{aligned}$$

   — D'après le principe de récurrence, on a : $M^n = QD^nQ$ pour tout entier naturel n.

4. Calculons $M^n = QD^nQ$. On a d'abord : $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{4})^n \end{pmatrix}$ car D est diagonale. Ensuite :

$$\begin{aligned}
M^n &= QD^nQ \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{4})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -(\frac{1}{2})^n & -2(\frac{1}{2})^n \\ 0 & 0 & (\frac{1}{4})^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1-(\frac{1}{2})^n & 1-2(\frac{1}{2})^n+(\frac{1}{4})^n \\ 0 & (\frac{1}{2})^n & 2(\frac{1}{2})^n-2(\frac{1}{4})^n \\ 0 & 0 & (\frac{1}{4})^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Partie II : Étude d'une expérience

1. Notons P_k^i (resp. F_k^i) l'événement " obtenir Pile (resp. Face) avec la pièce numéro k au lancer numéro i".

   a_1 (resp. b_1, c_1) est la probabilité d'obtenir 0 (resp. 1, 2) Pile(s) après le premier lancer. Les pièces étant équilibrées, et les lancers indépendants, on a :

$$a_1 = P(F_1^1 \cap F_2^1) = P(F_1^1)P(F_2^1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

$$b_1 = P\Big((P_1^1 \cap F_2^1) \cup (F_1^1 \cap P_2^1)\Big) = P(P_1^1)P(F_2^1) + P(F_1^1)P(P_2^1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$c_1 = P(P_1^1 \cap P_2^1) = P(P_1^1)P(P_2^1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

2. $$P_{A_n}(A_{n+1}) = 1$$

   car s'il y a eu 0 Piles à l'étape n, alors on ne relance aucune pièce et il y aura nécessairement 0 Piles à l'étape $n+1$.

$$P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}$$

   car s'il y a eu 1 Pile à l'étape n, alors on relance une seule pièce, qui donnera Face avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

$$P_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4}$$

   car s'il y a eu 2 Piles à l'étape n, on relance les deux pièces, qui donneront chacune Face avec la probabilité $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

3. Soit n un entier naturel non nul fixé. La famille $\{A_n, B_n, C_n\}$ constitue un système complet d'événements. En appliquant la formule des probabilités totales, il vient :

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= P(A_{n+1}) \\
&= P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) + P(C_n \cap A_{n+1}) \\
&= P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1}) \\
&= a_n \times 1 + b_n \times \frac{1}{2} + c_n \times \frac{1}{4} \\
&= a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n.
\end{aligned}$$

avec les probabilités conditionnelles calculées précédemment.

$$\begin{aligned}
b_{n+1} &= P(B_{n+1}) \\
&= P(A_n \cap B_{n+1}) + P(B_n \cap B_{n+1}) + P(C_n \cap B_{n+1}) \\
&= P(A_n)P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(B_{n+1}) \\
&= a_n \times 0 + b_n \times \frac{1}{2} + c_n \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{n+1} &= P(C_{n+1}) \\
&= P(A_n \cap C_{n+1}) + P(B_n \cap C_{n+1}) + P(C_n \cap C_{n+1}) \\
&= P(A_n)P_{A_n}(C_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(C_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(C_{n+1}) \\
&= a_n \times 0 + b_n \times 0 + c_n \times \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{4}c_n.
\end{aligned}$$

avec :

$$P_{A_n}(B_{n+1}) = P_{A_n}(C_{n+1}) = 0$$

car s'il y a 0 Pile à l'étape n, on ne relance aucune pièce donc il ne peut y avoir 1 ou 2 Piles à l'étape suivante ;

$$P_{B_n}(C_{n+1}) = 0$$

car s'il y a 1 Pile à l'étape n, on relance une seule pièce donc il ne peut y avoir 2 Piles à l'étape suivante ;

$$P_{B_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{2}$$

car s'il y a eu 1 Pile à l'étape n, on relance cette pièce qui donne Pile avec la probabilité $\frac{1}{2}$;

$$P_{C_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{2}$$

car s'il y a eu 2 Piles à l'étape n, on relance les deux pièces qui donnent les couples Pile-Face ou Face-Pile avec la probabilité $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$;

$$P_{C_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{2}$$

car s'il y a eu 2 Piles à l'étape n, on relance les deux pièces qui donneront le couple Pile-Pile avec la probabilité $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \\ \frac{1}{4}c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

(b) — L'égalité est vraie pour $n = 1$ car $M^{1-1} = M^0 = I$.

— Supposons l'égalité établie au rang n, et montrons la au rang $n+1$.
On a :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = MM^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$$

— D'après le principe de récurrence, l'égalité est établie pour tout $n \geq 1$.

5. (a) On avait trouvé dans la première partie :

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 1-(\frac{1}{2})^n & 1-2(\frac{1}{2})^n+(\frac{1}{4})^n \\ 0 & (\frac{1}{2})^n & 2(\frac{1}{2})^n-2(\frac{1}{4})^n \\ 0 & 0 & (\frac{1}{4})^n \end{pmatrix}.$$

Il vient :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1-(\frac{1}{2})^{n-1} & 1-2(\frac{1}{2})^{n-1}+(\frac{1}{4})^{n-1} \\ 0 & (\frac{1}{2})^{n-1} & 2(\frac{1}{2})^{n-1}-2(\frac{1}{4})^{n-1} \\ 0 & 0 & (\frac{1}{4})^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}+\frac{1}{2}-(\frac{1}{2})^n+\frac{1}{4}-(\frac{1}{2})^n+(\frac{1}{4})^n \\ (\frac{1}{2})^n+(\frac{1}{2})^n-2(\frac{1}{4})^n(\frac{1}{4})^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2(\frac{1}{2})^n+(\frac{1}{4})^n \\ 2(\frac{1}{2})^n-2(\frac{1}{4})^n \\ (\frac{1}{4})^n \end{pmatrix}$$

D'où le résultat.

(b) Calculons, pour $n \geq 1$ fixé :

$$a_n + b_n + c_n = 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n = 1$$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ car $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$ sont éléments de $]-1,1[$, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 1, \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} c_n = 0.$$

PARTIE III : Étude du nombre de lancers avant d'obtenir 0 Piles

On note X la variable aléatoire représentant le rang du lancer auquel on obtient 0 Pile pour la première fois (le plus petit des entiers n tels que A_n se produise).

1. $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$
2. $P(X = 1) = P(A_1) = \dfrac{1}{4}$.
3. Soit $n \geq 1$.
L'événement $[X > n]$ se produit si et seulement si on n'a jamais obtenu 0 Pile lors des n premiers lancers. Cela est également équivalent à obtenir 1 Pile ou 2 Piles au n-ème lancer. En effet :
— Si on n'a jamais obtenu 0 Pile lors des n premiers lancers, c'est qu'au n-ème lancer on a obtenu 1 Pile ou 2 Piles.

— Réciproquement, si au n-ème lancer on a obtenu 1 Pile ou 2 Piles, alors on ne peut avoir obtenu 0 Pile avant car sinon on n'aurait relancé aucune pièce.

On a ainsi $[X > n] = B_n \cup C_n$ (union disjointe) et donc

$$P(X > n) = P(B_n) + P(C_n) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n .$$

4. Soit $n \geq 2$.
   On a $[X > n-1] = [X = n] \cup [X > n]$ (union disjointe).
   Donc $P(X > n-1) = P(X = n) + P(X > n)$ et donc $P(X = n) = P(X > n-1) - P(X > n)$.
5. On a vu que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ puis que $P(X = 1) = \dfrac{1}{4}$.
   Utilisons le résultat des questions précédentes pour déterminer $P(X = n)$ pour $n \geq 2$.

$$P(X = n) = P(X > n-1) - P(X > n) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} - \left(2\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) .$$

   Puis

$$P(X = n) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} .$$

   Remarque : cette formule est également valable pour $n = 1$.
6. On a, pour $n \geq 1$,

$$|nP(X = n)| = n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{3}{4}\, n \, \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} .$$

   Il s'agit d'une combinaison linéaire de séries géométriques dérivées de raisons appartenant à $]0, 1[$. Donc cette série converge ; donc la série de terme général $nP(X = n)$ converge absolument ; donc x admet une espérance.
   On a :

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} n\, \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} ;$$

$$E(X) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{3}{4}\,\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2} = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3} .$$

Exercice 2

D'après EDHEC 2013

1. (a) On montre l'encadrement par récurrence.
   Pour $n = 0$, c'est bien vérifié car $u_0 = 0$. Supposons maintenant l'encadrement vrai à un rang n quelconque fixé. Montrons qu'il est alors vrai au rang $n + 1$:
   Comme $0 \leq u_n \leq 1$, on a $0 \leq u_n^2 \leq 1$ (par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$). Donc $1 \leq u_n^2 + 1 \leq 2$. Et donc, en divisant par 2 : $\dfrac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$. Par conséquent, on a bien $0 \leq u_{n+1} \leq 1$, ce qui termine la récurrence.
   $\boxed{\text{Conclusion : Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } 0 \leq u_n \leq 1.}$

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 + 1}{2} - u_n = \frac{u_n^2 + 1 - 2u_n}{2} = \frac{(u_n - 1)^2}{2}$$

Par conséquent, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n) \text{ est croissante.}}$

(c) La suite (u_n) est croissante (question précédente) et majorée par 1 (question 1.(a)). D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge}}$.

Appelons ℓ sa limite. Alors, en passant à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+1}{2}$, on obtient $\ell = \dfrac{\ell^2+1}{2}$. Donc (en multipliant par 2) : $2\ell = \ell^2 + 1$, c'est-à-dire $\ell^2 + 1 - 2\ell = 0$, ou encore : $(\ell - 1)^2 = 0$.
On en déduit que $\ell - 1 = 0$, i.e $\ell = 1$.
$\boxed{\text{Conclusion : } \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1.}$

2. (a) On calcule les termes successifs à l'aide d'une boucle `for` :

```python
def suite_u(n):
    res=0
    for i in range(1,n+1):
        res=(1+res**2)/2
    return res
```

(b) On fait une boucle `while` : tant que les 2 conditions ne sont pas réunies, on continue à calculer des termes :

```python
u=0
n=0
while 1-u > 10**(-3):
    u = (1+u**2)/2
    n = n+1

print(n)
```

3. (a) Ce graphique représente la suite des sommes partielles associée à la série de terme général v_n.
(b) Le graphique semble indiquer que la suite des sommes partielles tend vers $+\infty$; ce qui indiquerait que la série de terme général v_n est divergente.

4. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
v_k - v_{k+1} &= (1 - u_k) - (1 - u_{k+1}) \\
&= u_{k+1} - u_k \\
&= \frac{u_k^2 + 1}{2} - u_k \\
&= \frac{u_k^2 + 1 - 2u_k}{2} \\
&= \frac{(u_k - 1)^2}{2}
\end{aligned}$$

C'est-à-dire : $\boxed{v_k - v_{k+1} = \dfrac{v_k^2}{2}}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n-1}(v_k - v_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} v_k - \sum_{k=0}^{n-1} v_{k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} v_k - \sum_{k=1}^{n} v_j \quad \text{(changement d'indice : } j = k+1\text{)}$$

$$= v_0 + \sum_{k=1}^{n-1} v_k - \sum_{k=1}^{n-1} v_j - v_n \quad \text{(on sort des termes des sommes)}$$

Les sommes se simplifient. Il reste alors $\sum_{k=0}^{n-1}(v_k - v_{k+1}) = v_0 - v_n$. Or, $v_0 = 1 - u_0 = 1$. Donc finalement :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1}(v_k - v_{k+1}) = 1 - v_n}$$

(c) Soit $N \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\sum_{k=0}^{N} v_k^2 = 2\sum_{k=0}^{N}(v_k - v_{k+1}) \quad \text{(question 3.(a))}$$

$$= 2(1 - v_{N+1}) \quad \text{(question précédente)}$$

Or, $v_{N+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (car $u_n \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ d'après la question 1.(c)). Donc $\sum_{k=0}^{N} v_k^2 \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 2$.

$$\boxed{\text{Conclusion : La série de terme général } v_n^2 \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} v_n^2 = 2.}$$

Exercice 3

D'après Ecricome E 2005

Remarquons que, pour tout entier n, φ_n est continue sur $[0,1]$, ce qui justifie l'existence de l'intégrale I_n.

1. $I_0 = \int_0^1 e^{-2x}dx = \left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{2}$, donc $\boxed{I_0 = \frac{1-e^{-2}}{2}}$.

   $I_1 = \int_0^1 (1-x)\,e^{-2x}dx$.

   Posons $\begin{cases} u'(x) = e^{-2x}, u(x) = \dfrac{e^{-2x}}{-2} \\ v(x) = 1-x, v'(x) = -1 \end{cases}$ *,les* fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0,1]$, on peut procéder à une intégration parties dans I_1 :

$$\begin{aligned} I_1 &= \left[\frac{e^{-2x}}{-2} \times (1-x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{-2x}}{2}dx \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^1 \\ &\textit{donc } \boxed{\mathrm{I}_1 = \frac{1+e^{-2}}{4}} \end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x) = (1-x)^n\,e^{-2x}\,(1-x-1) = -x\,(1-x)^n\,e^{-2x}$.

   Or, pour tout $x \in [0,1]$, $-x \le 0$, $1-x \ge 0$ et $e^{-2x} \ge 0$.

Donc, pour tout $x \in [0,1]$, $\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x) \leq 0$. Par positivité (ou croissance plutôt) de l'intégrale entre des bornes croissantes,

$$\int_0^1 (\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x))\, dx \leq 0$$

c'est à dire $I_{n+1} - I_n \leq 0$.
Conclusion : la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Pour tout $x \in [0,1]$, $\varphi_n(x) \geq 0$ (détails à la question précédente) donc, par croissance de l'intégrale entre des bornes croissantes, $\int_0^1 \varphi_n(x)dx \geq 0$, c'est à dire $I_n \geq 0$.

4. Ainsi la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée (par 0) donc, d'après le théorème des suites monotones bornées, la suite est convergente.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Pour tout $x \in [0,1], -2x \leq 0$; et, la fonction exp étant croissante, $e^{-2x} \leq 1$ sur $[0,1]$. De plus $0 \leq (1-x)^n$.
On en déduit que pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leq \varphi_n(x) \leq (1-x)^n$. Par croissance de l'intégrale entre des bornes croissantes,

$$0 \leq \int_0^1 \varphi_n(x)dx \leq \int_0^1 (1-x)^n\, dx$$

Or

$$\int_0^1 (1-x)^n\, dx = \left[-\frac{(1-x)^n}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

Donc

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

6. Par le théorème de l'encadrement et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, on obtient donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

7. Soit $n \in \mathbb{N}$.
$\mathrm{I}_{n+1} = \int_0^1 (1-x)^{n+1} e^{-2x} dx$. Posons $\begin{cases} u'(x) = e^{-2x}, u(x) = \dfrac{e^{-2x}}{-2} \\ v(x) = (1-x)^{n+1}, v'(x) = -(n+1)(1-x)^n \end{cases}$ *, les* fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0,1]$, on peut procéder à une intégration parties dans I_{n+1} :

$$I_{n+1} = \left[\frac{e^{-2x}}{-2} \times (1-x)^{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)(1-x)^n \frac{e^{-2x}}{2} dx = \frac{1}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$$

Donc

$$I_{n+1} = \frac{1-(n+1)I_n}{2}$$

c'est à dire

$$2I_{n+1} = 1-(n+1)I_n$$

8. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2I_{n+1} = 1-(n+1)I_n$ donc $nI_n = 1 - I_n - 2I_{n+1}$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$, donc également $\lim\limits_{n\to+\infty} I_{n+1} = 0$.
On en déduit : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = 1}$

9. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $nI_n = 1 - I_n - 2I_{n+1}$ donc $nI_n - 1 = -I_n - 2I_{n+1}$ et donc

$$\Leftrightarrow n(nI_n - 1) = -nI_n - 2nI_{n+1} = -nI_n - 2\frac{n}{n+1}(n+1)I_{n+1}\ .$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)I_{n+1} = 1$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$; donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} n(n\,I_n - 1) = -3}$

10. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,(n\,I_n-1)=-3$, $n\,(n\,I_n-1)\sim-3$ et donc $n\,I_n-1\sim\dfrac{-3}{n}$.
On en déduit qu'il existe une fonction ε définie au voisinage de l'infini telle que $\lim\limits_{x\to+\infty}\varepsilon(x)=0$ et $n\,I_n-1=\dfrac{-3}{n}+\dfrac{-3}{n}\varepsilon\,(n)$; c'est à dire $n\,I_n=1-\dfrac{3}{n}-\dfrac{3}{n}\varepsilon\,(n)$; c'est à dire $I_n=\dfrac{1}{n}-\dfrac{3}{n^2}-\dfrac{3}{n^2}\varepsilon\,(n)$.
Ainsi *il* existe bien une fonction ε définie au voisinage de l'infini telle que $\lim\limits_{x\to+\infty}\varepsilon(x)=0$ et trois réels, a, b, c tels que :
$$I_n=a+\frac{b}{n}+\frac{c}{n^2}+\frac{1}{n^2}\varepsilon\,(n)\quad ,\text{où } a=0,b=1,c=-3$$

Exercice 4

D'après EML E 2009 Ex3

Partie I : Tirages avec arrêt dès qu'une boule noire a été obtenue

1. Tant que l'on n'a pas de boule noire, la probabilité d'en obtenir une reste q (boules équiprobables). Donc T est le rang du premier succès dans un processus sans mémoire et
Conclusion : $\boxed{T\hookrightarrow\mathcal{G}\,(q)\,,\ E\,(T)=\dfrac{1}{q},\ V\,(T)=\dfrac{p}{q^2}\text{ et pour tout } k\geq 1:\mathrm{P}\,(T=k)=p^{k-1}q}$
2. $(U=k)$ signifie que $(T=k+1)$ donc $U=T-1$
et
Conclusion : $\boxed{U\text{ a une espérance et une variance, } E\,(U)=E\,(T)-1=\dfrac{p}{q}\text{ et } V\,(U)=V\,(T)=\dfrac{p}{q^2}}$

Partie II : Tirages avec arrêt dès qu'une boule blanche et une boule noire ont été obtenues

1. (a) Remarquons que X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$.
$(X=k)$ signifie que l'on a effectué k tirages :
on a donc eu $k-1$ blanches puis une noire ou $k-1$ noires puis une blanche. (ces deux événements étant incompatibles). Avec les notations introduites dans l'énoncé :
$$[X=k]=(N_1\cap N_2\cap\cdots\cap N_{k-1}\cap B_k)\cup(B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_{k-1}\cap N_k)\ ,$$
l'union étant disjointe. On a donc, en utilisant de plus l'indépendance des tirages :
$$\mathrm{P}\,(X=k)=\mathrm{P}\,(N_1)\,\mathrm{P}\,(N_2)\cdots(N_{k-1})\,\mathrm{P}\,(B_k)+\mathrm{P}\,(B_1)\,\mathrm{P}\,(B_2)\cdots(B_{k-1})\,\mathrm{P}\,(N_k)\ .$$
Conclusion : $\boxed{\text{pour tout entier } k\geq 2:\mathrm{P}\,(X=k)=q\ p^{k-1}+p\ q^{k-1}.}$
   (b) La série converge car il s'agit d'une combinaison linéaire de série géométriques de raison p et q (tous deux éléments de $]0,1[$). On a
$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{+\infty}\mathrm{P}\,(X=k)&=\sum_{k=2}^{+\infty}\left[q\ p^{k-1}+p\ q^{k-1}\right]\\&=q\sum_{h=1}^{+\infty}p^h+p\sum_{h=1}^{+\infty}q^h\\&=qp\frac{1}{1-p}+pq\frac{1}{1-q}\\&=p+q\\&=1\end{aligned}$$
Conclusion : $\boxed{\sum_{k=2}^{+\infty}\mathrm{P}\,(X=k)=1}$

(c) Pour $k \geq 2$, on a $|k\mathrm{P}(X=k)| = k\mathrm{P}(X=k) = q\ kp^{k-1} + p\ kq^{k-1}$.
Il s'agit d'une combianison linéaire de termes généraux de séries géométriques dérivées de raison p et q ; donc cette série converge absolument et X a une espérance.

$$\begin{aligned} E(X) &= q\sum_{k=2}^{+\infty} kp^{k-1} + p\sum_{k=2}^{+\infty} kq^{k-1} \\ &= q\left(\frac{1}{(1-p)^2} - 1\right) + p\left(\frac{1}{(1-q)^2} - 1\right) \\ &= \frac{q}{q^2} - q + \frac{p}{p^2} - p \\ &= \frac{1}{q} + \frac{1}{p} - 1 \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{X \text{ admet une espérance et que : } E(X) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1.}$

2. (a)

```
def simul(p):
    X=0 # nombre de tirages effectu\'es
    Y=0 # nombre de boules blanches obtenues
    Z=0 # nombre de boules noires obtenues
    while Y < 1 or  Z < 1 :
        tir = rd.random()
        if tir<p :
            Y = Y + 1
        else :
            Z = Z + 1
        X = X + 1
    return X
```

(b) Ce programme calcule la moyenne des valeurs obtenues pour X lorsque l'on répète 10000 fois l'expérience aléatoire (avec $p = 0.5$). Cette moyenne permet d'approcher la valeur de l'espérance de X.

Lorsque $p = 0.5$, le résultat de la question 1.(c) donne $E(X) = 2 + 2 - 1 = 3$. La valeur $3,0034$ affichée est donc cohérente avec ce résultat.

3. (a) Pour $k = 2$, $(X = 2) \cap (Y = 1)$ signifie que l'on a effectué 2 tirages et obtenu une seule blanche (donc une seule noire)

On a donc pu avoir $N_1 \cap B_2$ ou $B_1 \cap N_2$ (incompatibles) et $\mathrm{P}((X = 2) \cap (Y = 1)) = pq + qp = 2pq$

Si $k \geq 3$ alors $(X = k) \cap (Y = 1)$ signifie que l'on n'a obtenu qu'une seule blanche (et plusieurs noires) et donc s'est arrêté sur une boule blanche.

$(X = k) \cap (Y = 1) = N_1 \cap \cdots \cap N_{k-1} \cap B_k$ et $\mathrm{P}((X = k) \cap (Y = 1)) = q^{k-1}p$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}((X = 2) \cap (Y = 1)) = 2pq \text{ et pour } k \geq 3 : \mathrm{P}((X = k) \cap (Y = 1)) = q^{k-1}p}$

(b) La loi de Y est une loi marginale du couple (X,Y) donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y=1) &= \sum_{k=2}^{+\infty} \mathrm{P}((X=k)\cap(Y=1)) \\
&= \mathrm{P}((X=2)\cap(Y=1)) + \sum_{k=3}^{+\infty} \mathrm{P}((X=k)\cap(Y=1)) \\
&= 2pq + \sum_{k=3}^{+\infty} q^{k-1}p = 2pq + p\sum_{h=2}^{+\infty} q^h \\
&= 2pq + p\left[\sum_{h=0}^{+\infty} q^h - 1 - q\right] \\
&= 2pq + p\left[\frac{1}{1-q} - 1 - q\right] \\
&= pq + \frac{p}{p} - p = 1 - p + pq \\
&= q + pq
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(Y=1) = q(1+p).}$

(c) $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour $n \geq 2$ quand $(Y=n)$ on a plus d'une blanche, donc on s'arrête sur une boule noire.
$(Y=n)$ signifie donc que l'on a eu n blanches puis une boule noire.
Donc $\mathrm{P}(Y=n) = p^{n-1}q$
Conclusion : $\boxed{Y(\Omega) = \mathbb{N}^* : \mathrm{P}(Y=1) = q(1+p) \text{ et } \mathrm{P}(Y=n) = p^{n-1}q \text{ pour } n \geq 2}$

4. En inversant les rôles de blanc et noir, on inverse les rôles de Y et de Z. La loi de Z est donc la même que celle de Y en inversant les rôles de p et de q.
Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l} Z(\Omega) = \mathbb{N}^* : \mathrm{P}(Z=1) = p(1+q).\text{et } \mathrm{P}(Z=n) = q^{n-1}p \text{ pour } n \geq 2 \\ \text{et } E(Z) = \dfrac{1}{p}\left(1-q+q^2\right) \end{array}}$

5. Pour tout $k \geq 1$: $(X-1=k)$ signifie qu'il y a eu k tirages avant le changement de couleur.
Si les tirages se finissent par noir, on a alors $Y=k$ et $Z=1$ donc $Y\ Z = k$
Si les tirages se finissent par blanc, on a alors $Y=1$ et $Z=k$ donc $Y\ Z=k$
Conclusion : $\boxed{Y\ Z = X-1}$

6. Y et Z ont une espérance. X a une espérance donc $X-1$ et $Y\ Z$ également $E(Y\ Z) = E(X)-1$
Donc (Y,Z) admet une covariance et $\operatorname{cov}(Y,Z) = E(Y\ Z) - E(Y)E(Z)$
Conclusion : $\boxed{\operatorname{cov}(Y,Z) = E(X) - E(Y)E(Z) - 1}$