DS n°3 - Concours Blanc

le 08/11/2024
Durée : 4h

— L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.
— La clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une grande part dans la notation.
— Le résultat d'une question peut être admis afin de traiter une question suivante.
— On encadrera le résultat de chaque question.

Exercice 1

PARTIE I : Calcul matriciel
On considère les trois matrices :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = QMQ.$$

1. Calculer $Q \times Q$. En déduire que Q est inversible et expliciter Q^{-1}.
2. Calculer D (on vérifiera que D est une matrice diagonale).
   Justifier que $M = QDQ$.
3. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = QD^nQ$.
4. Expliciter les neuf coefficients de la matrice M^n.

PARTIE II : Etude d'une expérience
On dispose de 2 pièces de monnaie équilibrées, c'est-à-dire que la probabilité d'avoir Pile en lançant l'une de ces pièces vaut $\frac{1}{2}$.
On effectue des lancers successifs selon le protocole suivant :
— à l'étape 1, on lance les 2 pièces,
— à l'étape 2, on lance les pièces ayant amené Pile à l'étape 1 (s'il en existe),
— à l'étape 3, on lance les pièces ayant amené Pile à l'étape 2 (s'il en existe),
et ainsi de suite. On suppose que les lancers successifs éventuels d'une même pièce sont indépendants et que les deux pièces sont indépendantes l'une de l'autre.

On admet l'existence d'un espace probabilisé (Ω, P) modélisant cette expérience aléatoire.
On considère, pour tout entier naturel n non nul, les événements :
— A_n : "obtenir 0 Pile à l'étape n ",
— B_n : "obtenir 1 Pile à l'étape n ",
— C_n : "obtenir 2 Piles à l'étape n ".

et on note $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.

1. Calculer a_1, b_1 et c_1.
2. Soit n un entier naturel non nul.
   Calculer les trois probabilités conditionnelles $P_{A_n}(A_{n+1})$, $P_{B_n}(A_{n+1})$ et $P_{C_n}(A_{n+1})$.
   Un argumentaire est attendu pour expliquer les valeurs de chacune de ces probabilités.

3. À l'aide de la formule des probabilités totales, prouver que :

$$\forall n \geq 1, \quad \begin{cases} a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{2}b_n + \dfrac{1}{4}c_n, \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{2}b_n + \dfrac{1}{2}c_n, \\ c_{n+1} = \dfrac{1}{4}c_n. \end{cases}$$

4. (a) Vérifier que :

$$\forall n \geq 1, \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix},$$

où la matrice M a été définie dans la partie I.

(b) Démontrer, par récurrence, que :

$$\forall n \geq 1, \quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}.$$

5. (a) En déduire que :

$$\forall n \geq 1, \quad P(A_n) = 1 + \frac{1}{4^n} - \frac{2}{2^n}, \quad P(B_n) = \frac{2}{2^n} - \frac{2}{4^n}, \quad P(C_n) = \frac{1}{4^n}.$$

(b) Vérifier que la somme de ces trois probabilités est égale à 1 et donner la limite de chacune d'elles.

PARTIE III : Étude du nombre de lancers avant d'obtenir 0 Piles

On note X la variable aléatoire représentant le rang du lancer auquel on obtient 0 Pile pour la première fois (le plus petit des entiers n tels que A_n se produise).

1. Déterminer l'ensemble (noté $X(\Omega)$) des valeurs prises par X.
2. Déterminer $P(X = 1)$.
3. Pour $n \geq 1$, montrer que $P(X > n) = \dfrac{2}{2^n} - \dfrac{1}{4^n}$
4. Montrer que, pour $n \geq 2$, $P(X = n) = P(X > n - 1) - P(X > n)$.
5. Déterminer la loi de X.
6. Montrer que X admet une espérance et calculer celle-ci.

Exercice 2

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 1}{2}$.

1. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $0 \leq u_n \leq 1$.

(b) Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(c) Déduire des questions précédentes que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

2. (a) Écrire une fonction Python `suite_u(n)` qui renvoie la valeur de u_n.

(b) Écrire un programme qui permet de déterminer et d'afficher la plus petite valeur de n pour laquelle on a : $1 - u_n < 10^{-3}$ (sans utiliser la fonction précédente).

3. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = 1 - u_n$. On cherche à étudier la convergence de la série de terme général v_n. On utilise le programme suivant :

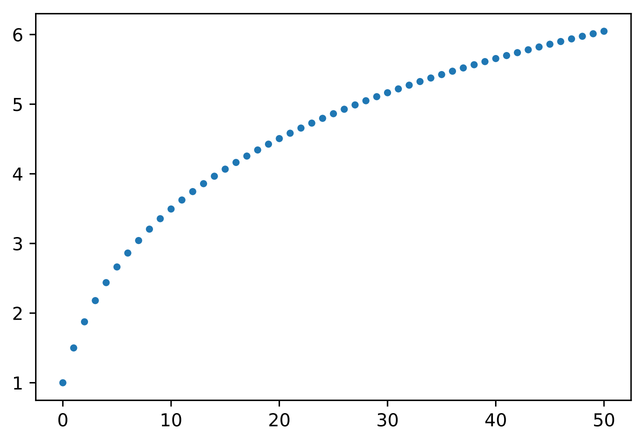
```
import matplotlib.pyplot as plt

n = 50
u = 0
v = 1-u
S = v
listeS = [S]
for i in range(1,n+1):
    u = (1+u**2)/2
    v = 1 - u
    S = S + v
    listeS.append(S)

plt.plot([i for i in range(n+1)] , listeS , '.')
```

(a) Expliquer ce que représente le graphique obtenu grâce à ce programme.

(b) Le graphique obtenu est le suivant :



Que peut-on en déduire sur le comportement de la série de terme général v_n ?

4. On cherche maintenant à étudier la convergence de la série de terme général v_n^2.

(a) Pour tout entier naturel k , exprimer $v_k - v_{k+1}$ en fonction de v_k.

(b) Simplifier, pour tout entier naturel n non nul, la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (v_k - v_{k+1})$.

(c) Donner pour finir la nature de la série de terme général v_n^2 ainsi que la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n^2$.

Exercice 3

On considère, pour tout entier naturel n, l'application φ_n, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_n(x) = (1-x)^n e^{-2x}$$

ainsi que l'intégrale : $I_n = \int\limits_0^1 \varphi_n(x)dx$.
On se propose de démontrer l'existence de trois réels, a, b, c tels que

$$I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{\varepsilon(n)}{n^2} \quad \text{avec} \quad : \lim_{n \to +\infty} \varepsilon(n) = 0.$$

1. Calculer I_0, I_1.
2. Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Déterminer le signe de I_n pour tout entier naturel n.
4. Qu'en déduit-on pour la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
5. Majorer la fonction $g : x \mapsto e^{-2x}$ sur $[0;1]$ et en déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
6. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
7. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$.
8. En déduire la limite de la suite $(nI_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
9. Déterminer la limite de la suite $(n(nI_n - 1))_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
10. Donner alors les valeurs de a, b, c.

Exercice 4

Une urne contient des boules blanches et des boules noires. La proportion de boules blanches est p et la proportion de boules noires est q.
Ainsi, on a : $0 < p < 1$, $0 < q < 1$ et $p + q = 1$.

Partie I : Tirages avec arrêt dès qu'une boule noire a été obtenue

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu une boule noire.

On note T la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués et U la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Reconnaître la loi de T. Pour tout entier $k \geq 1$, donner $\mathrm{P}(T = k)$ et rappeler l'espérance et la variance de T.
2. En déduire que U admet une espérance et une variance. Déterminer $E(U)$ et $V(U)$.

Partie II : Tirages avec arrêt dès qu'une boule blanche et une boule noire ont été obtenues

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu au moins une boule blanche et au moins une boule noire.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
On note Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.
On note Z la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues.
Ainsi, on peut remarquer que la probabilité de l'événement $(Y = 1) \cup (Z = 1)$ est égale à 1.
Pour tout entier naturel non nul i, on note :

B_i l'événement "la i-ème boule tirée est blanche",
N_i l'événement "la i-ème boule tirée est noire".

1. (a) Montrer, pour tout entier $k \geq 2$: $\mathrm{P}(X = k) = q\, p^{k-1} + p\, q^{k-1}$.

   (b) Vérifier : $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \mathrm{P}(X = k) = 1$.

   (c) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que : $E(X) = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - 1$.

2. On cherche à simuler cette expérience aléatoire.

   (a) On suppose que le module `numpy.random` a été importé par la commande :
   `import numpy.random as rd`.
   Compléter la fonction suivante afin qu'elle prenne en argument une valeur de p, simule l'expérience aléatoire et renvoie la valeur de X obtenue lors de cette simulation :

```
def simul(p)
    X = 0 # nombre de tirages effectu\'es
    Y = 0 # nombre de boules blanches obtenues
    Z = 0 # nombre de boules noires obtenues
    while ... or ...  :
        tir = rd.random()
        if tir < p :
            ...
        else :
            ...
        X = ...
    return ...
```

   (b) On effectue ensuite le programme suivant à partir de cette fonction :

```
p=0.5
n=10000
S=0
for i in range(n):
    S = S+simul(p)

moy=S/n
print(moy)
```

   Expliquer ce que permet d'obtenir ce programme.
   La valeur affichée suite à l'exécution est $3,0034$. Est-ce cohérent avec les résultats précédents ?

3. (a) Pour tout entier $k \geq 2$, déterminer $\mathrm{P}((X = k) \cap (Y = 1))$
   (On distinguera les cas $k = 2$ et $k \geq 3$.)

   (b) En déduire : $\mathrm{P}(Y = 1) = q(1 + p)$.

   (c) Déterminer la loi de la variable aléatoire Y.

   On admet que l'espérance de Y existe et que : $E(Y) = \dfrac{1}{q}\left(1 - p + p^2\right)$.

4. Donner la loi de Z et son espérance.

5. Montrer que les variables aléatoires Y Z et $X - 1$ sont égales.

6. Montrer que le couple (Y, Z) admet une covariance et exprimer $\mathrm{cov}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ à l'aide de $E(X), E(Y)$ et $E(Z)$.