Programme des colles des semaines S7-S8

Révisions : Calcul matriciel, systèmes linéaires

- Systèmes linéaires
- Règles de calcul sur les matrices
- Définition de l'inverse
- Calcul de l'inverse (directement, à l'aide d'un polynôme annulateur)

Chapitre : Espaces vectoriels

1. Espace vectoriel : définition, exemples usuels, règles de calcul, combinaisons linéaires
2. Sous espace vectoriel :
   - définition, caractérisation
   - SEV engendré par une famille de vecteurs
3. Bases
   - Famille libre, famille génératrice d'un SEV
   - Cas particuliers : une famille à un élément est libre ssi cet élément est non nul. Une famille formée de deux vecteurs est libre ssi ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.
   - Prop : Si on enlève un élément à une famille libre, on a toujours une famille libre. Si on ajoute un élément du SEV F à une famille génératrice de F, on a toujours une famille génératrice de F.
   - Base : définition (libre et génératrice), caractérisation (par le fait que tout élément de l'espace se décompose de manière unique comme combinaison linéaire d'élément de cette famille).
   - Bases canoniques de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Dimension
   - Définition
   - Liens entre la dimension d'un espace vectoriel et le nombre d'éléments d'une famille libre, d'une famille génératrice.
   - Dans un espace vectoriel de dimension n, une famille à n éléments est une base ssi elle est libre ssi elle est génératrice.
   - Prop : Si F est un SEV de E, alors $\dim(F) \leq \dim(E)$; et on a $\dim(F) = \dim(E)$ ssi $F = E$.
5. Rang (seulement en deuxième semaine)
   - Rang d'une famille de vecteurs, d'une matrice
   - $\mathrm{rg}({}^tA) = \mathrm{rg}(A)$.

Chapitre : Applications linéaires

E et F désignent des espaces vectoriels de dimension finie (avec dimension de E égale à n) ; f désigne un élément de $\mathcal{L}(E,F)$

1. Généralités
   - Définition d'une application linéaire, vocabulaire (endomorphisme, isomorphisme ...)
   - Premières propriétés (image du vecteur nul, image d'une combinaison linéaire de n vecteurs)
   - Prop : $\mathcal{L}(E,F)$ est un SEV de $\mathcal{F}(E,F)$
   - Composition, notation f^p

2. Image et noyau d'une application linéaire
   - Définition du noyau
   - Exemples de détermination d'une base d'un noyau.
   - Prop : le noyau de f est un SEV de E

Questions de cours

- **Famille libre :** Définition. Montrer que dans $\mathbb{R}_2[X]$ la famille formée par $X+1$, $X-1$ et X^2 est libre.
- **Famille liée :** Définition. Montrer si on ajoute un élément à une famille liée, on obtient une famille liée.

  J'ajoute la démonstration car je ne suis plus certain de l'avoir faite dans le cours :

  Supposons la famille d'éléments de E $u_1, \ldots, u_m$ liée. Soit $v \in E$.
  Montrons que la famille $u_1, \ldots, u_m, v$ est liée.
  Comme la famille $u_1, \ldots, u_m$ est liée, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ non tous nuls tels que :

  $$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_m u_m = 0_E \ .$$

  On a alors

  $$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_m u_m + 0v = 0_E \ ;$$

  et les réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, 0$ ne sont pas tous nuls.
  Donc la famille $u_1, \ldots, u_m, v$ est liée.
- **Noyau d'une application linéaire :** Définition. Montrer qu'il s'agit d'un SEV de E.