DM n°3

À rendre le 16/01/2026

Exercice 1

Dans tout l'exercice, on note M et I les deux matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Calculer M^2 et montrer que $M^4 = I$.
   (b) En déduire que M est inversible et donner l'expression de M^{-1}, sans calcul, en fonction de M.
   (c) Compléter le script *Python* suivant permettant de saisir M, de calculer $N = M^{-1}$ et d'afficher les deux matrices M et M^{-1}.

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al
M = ...
N = ...
print('la matrice M est :' , M)
print('la matrice inverse de M est :' , N)
```

2. (a) Montrer que la matrice $M - I$ est inversible.
   (b) Développer le produit matriciel $(M - I)(M^3 + M^2 + M + I)$, puis utiliser le résultat de la question 2.a) pour déterminer la matrice $M^3 + M^2 + M + I$.
   (c) Retrouver le résultat de la question 2.b) en calculant directement la matrice M^3.

3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer le produit $(x + 1)(x^2 + 1)$ et à l'aide de la question 2.b), en déduire que M possède au plus une valeur propre.
   (b) On pose : $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer MU et justifier que M possède une unique valeur propre dont on précisera la valeur.

4. (a) On suppose l'existence de réels x, y, z, x', y' et z' vérifiant la relation $xM^2 + yM + zI = x'M^2 + y'M + z'I$.
   Établir les égalités : $x = x', y = y'$ et $z = z'$.
   (b) *On rappelle* que par convention, pour toute matrice carrée S, on a $S^0 = I$.
   À l'aide d'un raisonnement par récurrence, déduire de la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique triplet de réels (a_n, b_n, c_n) tels que : $M^n = a_nM^2 + b_nM + c_nI$.
   On donnera la valeur du triplet (a_0, b_0, c_0) et on vérifiera les relations suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = b_n - a_n \\ b_{n+1} = c_n - a_n \\ c_{n+1} = -a_n \end{cases}.$$

5. Utiliser les relations trouvées à la question 4.b) pour compléter le script *Python* suivant afin qu'il calcule et affiche a_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n = int(input('entrez la valeur de n :'))
a = 0
b = 0
c = 1
for k in range(1,n+1):
    u = a
    a = .....
    b = .....
    c = .....

print(a)
```

Exercice 2 (facultatif)

On note f la fonction définie, pour tout réel x strictement positif, par : $f(x) = \dfrac{e^{1/x}}{x^2}$.

1. (a) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, montrer que l'intégrale $I_n = \int_n^{+\infty} f(x)\,dx$ est convergente et exprimer I_n en fonction de n.

   (b) En déduire que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

2. Montrer que la série de terme général $u_n = f(n)$ est convergente.

3. (a) Établir que : $\quad \forall k \in \mathbb{N}^\times, \quad f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant f(k)$.

   (b) En sommant soigneusement cette dernière inégalité, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant I_n \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k + \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$$

   (c) Déduire des questions précédentes un équivalent simple, lorsque n est au voisinage de $+\infty$, de $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{e^{1/k}}{k^2}$.