Programme des colles des semaines S13 et S14

Chapitre : Intégrale généralisée

Les fonctions sont supposées continues sur leur intervalle de définition

1. Rappels sur l'intégrale sur un segment $[a, b]$
   - Théorème fondamental du calcul intégral : dérivée de $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$
   - Calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive
   - Primitives des fonctions usuelles
   - Primitives obtenues à partir des formules de dérivation de fonctions composées
   - Intégration par parties
   - Changement de variable (simple ou avec indication).
2. Intégrale impropre en $\pm\infty$
   - Définition de la convergence
   - Intégrales de référence (intégrales de Riemann et intégrales sur $[0; +\infty[$ de $x \mapsto e^{\alpha x}$).
3. Propriétés
   - Linéarité, relation de Chasles, croissance de l'intégrale
   - Intégrale et parité

   Remarque : les intégrations par parties et changements de variables se feront sur un segment (sauf éventuellement pour un changement de variable affine).
4. Utilisation des comparaisons
   On se place sur un intervalle $[a, +\infty[$ (les propriétés sont à adapter si l'intégrale est impropre en $-\infty$).
   - Rappel : propriétés d'une fonction croissante majorée sur $[a, +\infty[$
   - Prop : si f est à valeurs positives, alors la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie en $+\infty$ ssi elle est majorée
   - Prop : si f et g vérifient, pour tout $x \in [a, +\infty[$, $0 \leq f(x) \leq g(x)$, et si l'intégrale de g sur $[a, +\infty[$ converge, alors celle de f également.
   - Prop : cas où f et g sont à valeurs positives et où, en b, $f = o(g)$.
   - Prop : cas où f et g sont à valeurs positives et où, en b, $f \sim g$.
5. Convergence absolue
   - Définition
   - Prop : la convergence absolue entraîne la convergence
   - Application : utilisation des propriétés de comparaison lorsque les fonctions ne sont pas à valeurs positives.
6. Fonctions continues par morceaux
   La définition de l'intégrale est étendue aux fonctions continues par morceaux. Les principales propriétés restent valables.
   Cette extension n'a pas été détaillée.

Chapitre : variables aléatoires à densité

Les propriétés de ce chapitre sont admises (à l'exception des propriétés des lois usuelles).

1. Définitions et première propriétés
    - Définition d'une densité de probabilité, d'une variable aléatoire admettant une telle densité
    - Définition de la fonction de répartition
    - Propriétés de la fonction de répartition d'une V.A. à densité
    - Obtention d'une densité à partir de la fonction de répartition

La suite n'est au programme que de la deuxième semaine.

2. Moments d'une variable aléatoire
    - Définition de l'espérance d'une variable aléatoire
    - Formule de transfert
    - Moments d'ordre r
    - Variance : définition, formule de Koenig-Huygens
3. Propriétés générales des variables aléatoires réelles
    - Espérance et variance de $aX + b$ en fonction de celles de X
    - Espérance de $X + Y$, extension à une somme de n variables aléatoires
    - Croissance de l'espérance
    - Indépendance de n variables aléatoires (2 à 2 et mutuelle)
    - Lemme des coalitions
    - Espérance du produit de deux variables indépendantes
    - Variance de la somme de deux variables indépendantes, extension à la somme de n variables
4. Lois usuelles
    - Lois uniformes : densité, fonction de répartition, espérance, variance
    - Prop : Pour $a < b$, X suit une loi $\mathcal{U}([a, b])$ ssi $\dfrac{X - a}{b - a}$ suit une loi $\mathcal{U}([0, 1])$.
    - Lois exponentielles : densité, fonction de répartition, espérance, variance
    - Loi normale centrée réduite : densité (le fait que son intégrale vaille 1 est admis), espérance, variance
    - Utilisation des propriétés de symétrie de la densité de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.
    - Loi normale quelconque : densité
    - Prop : X suit une loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ ssi $(X - m)/\sigma$ suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$.
    - Conséquence : espérance et variance de X suivant une loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$
    - Prop (admise) : la somme de variables aléatoires indépendantes suivant des lois normales suit une loi normale.