Feuille d'exercices n°7 : Intégration

1 Méthodes de base

Exercice 1. – Calculs de primitives – Trouver une primitive de chacune des fonctions sur I

1. $x \mapsto x^4 + \dfrac{x^2}{3} - x + 2$, $I = \mathbb{R}$.
2. $x \mapsto x^{3/2}$, $I =]0; +\infty[$.
3. $x \mapsto \dfrac{2}{x^4}$, $I =]0; +\infty[$.

Exercice 2. – Calculs de primitives et fonctions composées – Trouver une primitive de chacune des fonctions sur I

1. $x \mapsto \dfrac{1}{(2x+4)^3}$, $I =]-2; +\infty[$.
2. $x \mapsto \dfrac{3}{4x+1}$, $I =]0; +\infty[$.
3. $x \mapsto xe^{x^2}$, $I = \mathbb{R}$.
4. $x \mapsto e^{-2x}$, $I = \mathbb{R}$.
5. $x \mapsto \dfrac{1}{x}\ \ln(x)$, $I =]0; +\infty[$.

Exercice 3. – Convergences d'intégrales par le calcul – Étudier la convergence des intégrales suivantes par le calcul et, en cas de convergence, déterminer leur valeur.

1. $x \mapsto e^{-2x}$, sur $I = [0; +\infty[$.
2. $x \mapsto \dfrac{1}{2x+4}$, sur $I = [0; +\infty[$.
3. $x \mapsto \dfrac{3}{(4x+1)^2}$, sur $I = [1; +\infty[$.
4. $x \mapsto xe^{-x^2}$, sur $I = \mathbb{R}$.
5. $x \mapsto (x+1)e^{x/2}$, sur $I =]-\infty, 0]$.

Exercice 4. – Convergences d'intégrales et comparaisons – Étudier sans calcul la convergence des intégrales suivantes

1. $f_1 : x \mapsto \dfrac{x^2}{x^3 + x + 7}$, sur $I = [0; +\infty[$.
2. $f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 \ln(x)}$, sur $I = [2; +\infty[$.
3. $f_3 : x \mapsto x^2 e^{-x}$, sur $I = [0; +\infty[$.

Exercice 5. – Changement de variable – Montrer que l'intégrale suivante converge et déterminer sa valeur en effectuant le changement de variable $u = 4x + 1$: $\int_1^{+\infty} \dfrac{3}{(4x+1)^2}\ \mathrm{d}t$.

Exercice 6. – Utilisation de la parité –

1. Étudier la parité de la fonction f définie sur $]-\infty, +\infty[$ par $f(t) = \dfrac{t}{t^4 + t^2 + 1}$.
2. Étudier la convergence de l'intégrale de f sur $]-\infty, +\infty[$ et donner sa valeur.

2 Divers

Exercice 7. – Étudier la convergence et, en cas de convergence, calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t}}\mathrm{dt}$,
2. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(2t+3)^2}\mathrm{dt}$,
3. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{2^t}\mathrm{dt}$,
4. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}\mathrm{dt}$,

Exercice 8. – Étudier (sans les calculer) la convergence des intégrales suivantes.

1. $f_1 : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{x^2+x+5}$, sur $I = [0;+\infty[$.
2. $f_2 : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^3}$, sur $I = [1;+\infty[$.

Exercice 9. – **Changement de variable** – Montrer que l'intégrale suivante converge et déterminer sa valeur en effectuant le changement de variable $u = \sqrt{t}$: $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}\ dt$.

Exercice 10. – **Utilisation d'un DL2**
Etudier la convergence de l'intégrale de $f : x \mapsto \sqrt{x}\left(e^{1/x} - 1 - \dfrac{1}{x}\right)$ sur $[1;+\infty[$

Exercice 11. – **propriétés liées à la parité**
Démontrer la propriété du cours concernant l'utilisation de la parité d'une fonction.

Exercice 12. – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x}\ln(1+e^x)$.

1. Montrer que pour tout $t > 0$ on a : $\ln(1+t) > \frac{t}{1+t}$.
2. Déterminer $f'(x)$ pour tout x réel et en déduire les variations de f.
3. Calculer les limites de f en plus et moins l'infini.
4. (a) Pour tout réel x, vérifier que $f(x) = 1 - f'(x) - e^x/(1+e^x)$. En déduire, en fonction de f, une primitive de F de f.
   (b) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{dx}$ est convergente et donner sa valeur.

Exercice 13. – **Fonction définie par une intégrale**
On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$f\left(x\right) = \frac{\ln\left(x\right)}{x - \ln\left(x\right)} \quad \text{si } x > 0 \qquad \text{et} \qquad f(0) = -1$$

1. (a) Montrer que f est définie et continue sur $D = [0,+\infty[$.
   (b) Déterminer le signe de f.
2. Pour tout réel x élément de D, on pose $F\left(x\right) = \int_0^x f\left(t\right)dt$
   (a) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D puis étudier ses variations.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\ln t}{t}dt$.
   (c) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\ln t}{t-\ln t}dt$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} F\left(x\right)$.
   (d) Donner l'allure de la courbe représentative de F.

Exercice 14. – Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\mathrm{d}x$.

1. Montrer que pour tout n I_n converge.
2. Calculer I_0, I_1, I_2, I_3.
3. Énoncer une conjecture pour I_n et démontrez-la.