Feuille d'exercices n^o 8 : Variables aléatoires à densité

Méthodes de base

Exercice 1 – Fonction de répartition d'une V.A. discrète

On considère la variable aléatoire X dont la loi est donnée par :

k	-1	0	2
$P(X=k)$	$1/4$	$1/2$	$1/4$

Déterminer la fonction de répartition de X.

Exercice 2 – Montrer qu'une fonction est une densité

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=0$ si $x<1$ et $f(x)=\dfrac{a}{x^3}$ si $x \geq 1$.

1. Déterminer a pour que f soit une densité.
2. Soit X une variable aléatoire réelle admettant f pour densité. Calculer $P(0<X<2)$, $P(X>3)$.

Exercice 3 – Déterminer la fonction de répartition d'une V.A. à densité

On reprend les données de l'exercice précédent.

1. Déterminer la fonction de répartition F_X de X et tracer son graphique.
2. Retrouver $P(0<X<2)$ et $P(X>3)$.
3. Déterminer α tel que $P(X>\alpha)=0,05$.

Exercice 4 – Déterminer une densité à partir de la fonction de répartition

On suppose que la variable aléatoire X admet pour fonction de répartition la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x)=x^2/4$ si $0<x<2$, $F(x)=0$ si $x \leq 0$ et $F(x)=1$ si $x \geq 2$.

1. Tracer la courbe de F.
2. Vérifier que X est une V.A. à densité et en déterminer une densité.

Exercice 5 – Déterminer les caractéristiques de la loi de aX+b

On reprend les données de l'exercice précédent. On définit la variable aléatoire $Y=-X+1$. Déterminer la fonction de répartition de Y, montrer que Y est une V.A. à densité puis déterminer celle-ci.

Exercice 6 – Espérance d'une V.A.

On reprend les données de l'exercice 2.

1. Montrer que X admet une espérance et la calculer.
2. Déterminer l'espérance de $Y=-X+1$.

Exercice 7 – Formule de transfert

Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0,2]$. Montrer l'existence et calculer $E[e^X]$.

Exercice 8 – Utilisation de la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$

On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
On donne $\Phi(1) \simeq 0,84$, $\Phi(0,5) \simeq 0,69$.

1. Soit X une V.A. de loi normale centrée réduite. Déterminer $P(-1<X<1)$, $P(X>1)$, $P(X>-1)$.
2. Soit Y une V.A. de loi $\mathcal{N}(1,4)$. Déterminer $P(Y \leq 1)$, $P(Y \geq 0)$, $P(Y \geq -1)$.

Autres exercices

Exercice 9 – On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax(1-x)$ si $0 < x < 1$ et $f(x) = 0$ sinon.

1. Déterminer a pour que f soit une densité.
2. Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité. Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
3. Déterminer l'espérance de X ainsi que sa variance.

Exercice 10 – On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$ si $x < 0$ et $f(x) = 0$ sinon.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. On note X une V.A. ayant f pour densité. Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
3. Montrer que X admet un moment d'ordre 1 et calculer son espérance.

Exercice 11 – Variable aléatoire définie comme une fonction d'une variable aléatoire

1. Soit X une V.A.R. suivant une loi uniforme sur $[1;2]$. On considère la V.A.R. $Y = X^2$. Déterminer la fonction de répartition de X, puis celle de Y et enfin la densité de Y.
2. Soit X une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(0,1)$. Déterminer la loi de $Y = |X|$.

Exercice 12 – Exemple d'une variable aléatoire n'admettant pas de moment d'ordre 1 –

1. Déterminer a et b tel que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$, $\dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1}$.
2. Déterminer p pour que $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{p(x^2-1)} & si\ x < -2\ ou\ x > 2 \\ 0 & sinon \end{cases}$ soit une densité de probabilité.
3. Soit X une variable aléatoire de densité f. Donner la fonction de répartition de X.
4. La variable aléatoire X admet-elle un moment d'ordre 1 ?

Exercice 13 – Loi exponentielle ; utilisation comme outil de calcul – Soit X une variable aléatoire de densité f définie par $f(x) = xe^{-x}$ si $x \geq 0$ et $f(x) = 0$ sinon.

1. Vérifier que f est une densité de probabilité (on pourra s'appuyer sur les propriétés de la loi exponentielle).
2. Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité. Déterminer l'espérance et la variance de X, toujours en faisant le minimum de calculs.
3. Déterminer la fonction de répartition de X.

Exercice 14 – **Minimum et maximum de deux V.A.**
Soient X et Y deux V.A.R. suivants des lois uniformes sur $[0;1]$ et indépendantes, c'est à dire que quels que soient les réels a, b, a' et b', les événements $a < X < b$ et $a' < Y < b'$ sont indépendants.
On définit deux nouvelles variables aléatoires U et V par $U = Max(X;Y)$ et $V = min(X;Y)$.

1. Déterminer la fonction de répartition F de X et Y.

2. En déduire la fonction de répartition de U puis sa densité.

3. Calculer l'espérance de U.

4. Exprimer $U + V$ en fonction de X et Y. En déduire $E(V)$.

5. Déterminer la fonction de répartition puis la densité de V.

Exercice 15 – **Loi normale : changement des paramètres** – On suppose dans cet exercice que l'on ne connaît la densité que de la loi normale centrée réduite, ainsi que les caractéristiques de celle-ci. On revient sur un point vu en cours avec une méthode légèrement différente.

1. On considère, pour $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$.
   Montrer que f est une densité de probabilité (On pourra utiliser le changement de variable $u = \dfrac{x-m}{\sigma}$).

2. Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité.

   (a) Déterminer l'espérance de X (après avoir montré qu'elle existe).

   (b) Même question pour la variance de X.

Exercice 16 – **Caractère sans mémoire de la loi exponentielle**
Soit T une variable aléatoire modélisant la durée de vie d'un composant. On suppose que T suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. Pour $x \geq 0$, déterminer $P(T \geq x)$.

2. Pour $x_0 \geq 0$ et $x \geq 0$, déterminer $P_{T \geq x_0}(T \geq x_0 + x)$.

3. Comparer ces deux valeurs. Que peut-on en conclure sur le composant en question ?

Problèmes

Exercice 17 –

1. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2} dx$ est convergente et donner sa valeur.

2. On considère la fonction f définie par $\forall x, f(x) = \frac{1}{2(1+|x|)^2}$.
   Montrer que f est paire.
   Montrer que f peut être considérée comme une fonction densité de probabilité.

   Dans la suite, on considère une variable aléatoire X, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ admettant f comme densité. On note F la fonction de répartition de X.

3. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

4. On pose $Y = \ln(1+|X|)$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

   a) Déterminer $Y(\Omega)$.

   b) Exprimer la fonction de répartition G de Y à l'aide de F.

   c) En déduire que Y admet pour densité la fonction g définie par :

   $$g(x) = \begin{cases} 2e^x f(e^x - 1) & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

   d) Montrer que Y a une densité de la forme :

   $$h : x \mapsto \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

   e) Calculer l'espérance de Y.

5. On considère la variable aléatoire $Z = \lfloor Y \rfloor$ (la partie entière de Y).

   a) Déterminer la loi de Z.

   b) Calculer l'espérance de Z. Comparer $E(Z)$ et $E(Y)$

   c) A-t-on toujours la même comparaison entre l'espérance d'une variable aléatoire et celle de sa partie entière ?

Exercice 18 –

1. Montrer que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$ est convergente et donner sa valeur.

   On note f la fonction définie par $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{2x}} & \text{si } x \geq 2 \\ 0 & \text{si } x < 2 \end{cases}$

2. Montrer que f définit une densité de probabilité.

3. On considère une variable aléatoire X admettant f pour densité.

   a) Déterminer la fonction de répartition de X.

   b) La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

   On considère trois variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 indépendantes, et toutes de même loi que X.

4. On pose $U = \text{Min}(X_1, X_2, X_3)$ et on admet que U est une variable aléatoire.

   a) Déterminer la fonction de répartition G de U.

   b) Montrer que U est une variable à densité et donner une densité g de U.

   c) Montrer que U admet une espérance et calculer $E(U)$.

5. On pose $V = \sup(X_1, X_2, X_3)$ et on admet que V est une variable aléatoire.

   a) Déterminer la fonction de répartition H de V.

   b) Montrer que V est une variable aléatoire à densité et donner une densité h de V.

   c) La variable aléatoire V admet-elle une variance ?