Corrigé du DM n°3

À rendre le 16/01/2026

Exercice 1

1. (a) $M^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

   $M^4 = (M^2)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (b) On a $M\ M^3 = I$; donc M est inversible et $M^{-1} = M^3$.

   (c)
```
M = np.array([[-1 ,-1 ,-1],[ 1, 0 ,0] ,[0 ,1 ,0]])
N = al.matrix_power(M,3)
print('la matrice M est :' M)
print('la matrice inverse de M est :' N)
```

2. (a) $M - I = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

   Résolvons, pour $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ quelconque, le système $(S) : (M - I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
(S) \iff & \left\{ \begin{array}{rcll} -2x - y - z & = & a & \\ x - y & = & b & \\ y - z & = & c & \end{array} \right. \\
\iff & \left\{ \begin{array}{rcll} -2x - y - z & = & a & \\ -3y - z & = & b & L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ y - z & = & c & \end{array} \right. \\
\iff & \left\{ \begin{array}{rcll} -2x - y - z & = & a & \\ -3y - z & = & b & \\ -4z & = & c & L_3 \leftarrow 3L_3 + L_2 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

   On obtient un système triangulaire sans 0 sur la diagonale, donc $M - I$ est inversible.

   (b) $(M - I)(M^3 + M^2 + M + I) = M^4 + M^3 + M^2 + M - (M^3 + M^2 + M + I) = I + M^3 + M^2 + M - (M^3 + M^2 + M + I) = 0_3$.
   Comme, d'après la question 2.a), $M - I$ est inversible, on en déduit que $M^3 + M^2 + M + I = 0_3$.

   (c) $M^3 = M\ M^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

   $M^3 + M^2 + M + I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} +$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0_3$.

3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. $(x+1)(x^2+1) = x^3 + x^2 + x + 1$.
D'après la question 2.b), ce polynôme est annulateur pour M. Donc les valeurs propres de M sont racines de ce polynôme.
Comme x^2+1 n'a pas de racine, la seule racine de $x^3 + x^2 + x + 1 = (x+1)(x^2+1)$ est -1.
On en déduit que M possède au plus une valeur propre : -1.

(b) On a $MU = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -U$.
Donc, comme U est non nul, -1 est bien valeur propre de M (et c'est la seule d'après la question précédente).

4. (a) On suppose l'existence de réels x, y, z, x', y' et z' vérifiant la relation $xM^2 + yM + zI = x'M^2 + y'M + z'I$.
On a alors $\begin{pmatrix} -y+z & -y & x-y \\ -x+y & -x+z & -x \\ x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y'+z' & -y' & x'-y' \\ -x'+y' & -x'+z' & -x' \\ x' & y' & z' \end{pmatrix}$.
La troisième ligne donne $x = x'$, $y = y'$ et $z = z'$. Établir les égalités : $x = x', y = y'$ et $z = z'$.

(b) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ la propriété : il existe un unique triplet de réels (a_n, b_n, c_n) tels que : $M^n = a_n M^2 + b_n M + c_n I$.

- Initialisation : $M^0 = I = 0\ M^2 + 0\ M + 1\ I$. De plus cette écriture est unique d'après le a).
Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie, avec $(a_0, b_0, c_0) = (0, 0, 1)$.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie.
On a alors, en utilisant l'hypothèse de récurrence :
$$M^{n+1} = M\ M^n = M(a_n M^2 + b_n M + c_n I) = a_n M^3 + b_n M^2 + c_n M\ .$$
Or on a vu au 2. que $M^3 = -M^2 - M - I$. On obtient donc :
$$M^{n+1} = a_n(-M^2 - M - I) + b_n M^2 + c_n M = (b_n - a_n)M^2 + (c_n - a_n)M - a_n I\ ;$$
et donc $M^{n+1} = a_{n+1}M^2 + b_{n+1}M + c_{n+1}I$, avec $\begin{cases} a_{n+1} = b_n - a_n \\ b_{n+1} = c_n - a_n \\ c_{n+1} = -a_n \end{cases}$
De plus cette écriture est unique d'après le a). Ainsi $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion :En application du principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5.
```
n = int(input('entrez la valeur de n :'))
a = 0
b = 0
c = 1
for k in range(1,n+1):
```

```
    u = a
    a = b-u
    b = c-u
    c = -u

print(a)
```

Remarque : la ligne `u=a` sert à stocker la valeur de `a` car celle-ci est modifiée par la ligne `a=b-u` et ne peut donc être réutilisée ensuite.

Exercice 2 (facultatif)

1. (a) I_n est impropre en $+\infty$ (car f continue sur $]0,+\infty[$)
   $\int_n^M \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx = \left[-e^{\frac{1}{x}}\right]_{x=n}^{M} = -e^{\frac{1}{M}} + e^{\frac{1}{n}} \to e^{\frac{1}{n}} - 1$ quand $M \to +\infty$ donc I_n converge et est égale à $I_n = e^{\frac{1}{n}} - 1$

   (b) On sait que lorsque $x \to 0$, $e^x - 1 \sim x$. Or quand $n \to +\infty$, $\frac{1}{n} \to 0$; donc $I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

2. On a $\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$ et comme la série des $\frac{1}{n^2}$ converge (série de Rieman) alors, par équivalence de séries à termes positifs, la série de terme général $u_n = f(n)$ est convergente.

3. (a) Pour encadrer l'intégrale, on encadre tout d'abord f et pour celà, on détermine son sens de variations :
   f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}x^2 - 2xe^{\frac{1}{x}}}{x^4} = \frac{-(1+2x)\,e^{\frac{1}{x}}}{x^4} < 0 \text{ sur }]0,+\infty[$$

   donc pour $0 < k \leq x \leq k+1$ on a $f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)$ ($f(k)$ et $f(k+1)$ constantes par rapport à x). En intégrant on obtient alors :

$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant f(k) \ .$$

   (b) On somme alor sl'inégalité précédente de n à M :

$$\sum_{k=n}^{M} f(k+1) \leqslant \sum_{k=n}^{M} \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=n}^{M} f(k)$$

   réindexé $h = k+1$ pour la première somme donc

$$\sum_{h=n+1}^{M+1} f(h) \leqslant \int_n^{M+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=n+1}^{M} f(k) + f(n)$$

   et par passage à la limite dans les inégalités (les séries et l'intégerale convergent quand $M \to +\infty$)

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant I_n \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k + \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$$

(c) On a alors le double encadrement :

$$I_n - \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leqslant I_n$$

et en divisant par I_n :

$$1 - \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2 I_n} \leq \frac{\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k}{I_n} \leqslant 1$$

De plus, comme $I_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$, $n^2 I_n \underset{+\infty}{\sim} n$. De plus, lorsque $n \to +\infty$, $e^{1/n} \to 1$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2 I_n} = 0$. On en déduit, par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k}{I_n} = 1$.

Conclusion : $\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{k}}}{k^2} \sim I_n \sim \frac{1}{n} \text{ quand } n \to +\infty}$