DM n°4

À rendre le 27/01/2026

Exercice 1

On considère les fonctions f, g et h définies respectivement sur $\mathbb{R}$ par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{2}{1+e^x}, \qquad g(x) = -2\ln\left(1+e^{-x}\right) \qquad h(x) = \begin{cases} \frac{2e^x}{(1+e^x)^2} & \text{si} x \geq 0 \\ 0 & \text{si} x < 0 \end{cases}$$

1. Soit $x \geq 0$. Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$ puis vérifier que: $h(x) = -f'(x)$ et $f(x) = g'(x)$.
2. Soit $A \geq 0$. Justifier que : $\displaystyle\int_0^A h(x)\mathrm{dx} = 1 - f(A)$. Que vaut $\int_0^A f(x)\mathrm{dx}$?
3. Soit $A \geq 0$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que: $\displaystyle\int_0^A x.h(x)\mathrm{dx} = -Af(A) + g(A) - g(0)$.
4. La fonction h est-elle continue en 0? *Une réponse argumentée est attendue.*
5. Prouver que h est une densité de probabilité.

Dans toute la suite de l'exercice, on désigne par Z une variable aléatoire dont h est une densité.

6. Démontrer que la fonction de répartition H de Z est définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} \text{si } x \geq 0, & H(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1} \\ \text{si } x < 0, & H(x) = 0. \end{cases}$
7. Calculer les probabilités suivantes: $P(Z \geq \ln(2))$, $P(\ln(2) \leq Z \leq \ln(8))$ et $P_{[Z \geq \ln(2)]}(Z \leq \ln(8))$.
   On donnera les résultats sous la forme de fractions irréductibles.
8. Déterminer la médiane de Z c'est-à-dire la valeur de x pour laquelle $H(x) = \frac{1}{2}$.
9. Établir que Z possède une espérance et donner la valeur de $E(Z)$.

Exercice 2 (facultatif)

On admet que si Z_1 et Z_2 sont deux variables aléatoires à densité, définies sur le même espace probabilisé, alors leur covariance, si elle existe, est définie par :

$$\mathrm{Cov}\left(Z_1, Z_2\right) = E\left(Z_1 Z_2\right) - E\left(Z_1\right) E\left(Z_2\right)$$

On admet également que si Z_1 et Z_2 sont indépendantes alors leur covariance est nulle.

On considère deux variables aléatoires réelles X et U dé finies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, indépendantes, X suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et U suivant la loi discrète uniforme sur $\{-1, 1\}$.

On pose $Y = UX$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité , définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.

1. (a) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que :

$$\mathrm{P}(Y \leq x) = \mathrm{P}([U=1] \cap [X \leq x]) + \mathrm{P}([U=-1] \cap [X \geq -x])$$

   (b) En déduire que Y suit la même loi que X.

2. (a) Calculer l'espérance de U puis montrer que $E(XY) = 0$

   (b) En déduire que $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

3. (a) Rappeler la valeur de $E\left(X^2\right)$ et en déduire que $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}$

   (b) Montrer, grace à une intégration par parties que

$$\forall A \in \mathbb{R}_+ : \quad \int_0^A x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -A^3 e^{-\frac{A^2}{2}} + 3 \int_0^A x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

   (c) En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ converge et vaut $\dfrac{3}{2}\sqrt{2\pi}$.

   (d) Etablir finalement que X possède un moment d'ordre 4 et que $E\left(X^4\right) = 3$

4. (a) Vérifier que $E\left(X^2 Y^2\right) = 3$

   (b) Déterminer $\mathrm{Cov}\left(X^2, Y^2\right)$

   (c) En déduire que X^2 et Y^2 ne sont pas indépendantes. Montrer alors que X et Y ne le sont pas non plus.

   (d) Cet exercice a permis de montrer qu'un résultat classique concernant les variables discrètes est encore valable pour les variables à densité. Lequel ?