TP8 : GRAPHES I

Introduction

Les graphes interviennent dans de nombreux problèmes, en particulier ils servent à modéliser les réseaux. Le problème fondateur de cette théorie est celui des pont de Königsberg, posé en 1736 par Euler. Parmi les autres problèmes connus, citons ceux de colorations d'un graphe, modélisant par exemple le problème suivant : combien au minimum faut-il de couleurs pour colorier une carte de sorte que deux pays frontaliers n'aient pas la même couleur. Cette question a été résolue par un théorème célèbre, celui des quatre couleurs.
Nous nous intéresserons plus spécifiquement dans ce TP à la représentation d'un graphe, à la question du nombre de chemins d'un sommet à l'autre, ainsi qu'à la question de l'existence d'un tel chemin (connexité). Dans un deuxième TP, nous nous intéresserons au problème du plus cours chemin dans un graphe pondéré.

1 Représentation

La façon la plus élémentaire de représenter un graphe non pondéré (a priori orienté) est une matrice d'adjacence : un tableau à double entrée indexé par les sommets (le sommet A est représenté par 0, B par 1 ...). Ce tableau sera implémenté par exemple par une liste de listes en python.
Dans ce graphe, on mettra 1 dans la case (i, j) s'il y a un arc lreliant i à j, et 0 sinon.

Exemple 1.1 *Tracer le graphe G_1 (orienté) dont la matrice d'adjacence est la suivante :*

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut aussi représenter un graphe par une liste d'adjacence : une liste de listes `L` telle que `L[s]` soit la liste des sommets accessibles à partir du sommet `s` (les sommets sont toujours représentés par des entiers).

Exemple 1.2 *Déterminer la liste d'adjacence du graphe précédent.*

Un graphe est dit non orienté lorsque les sommets sont reliés par des arêtes (sans flêche) et non des arcs. La matrice d'ajacence d'un tel graphe doit être symmétrique.

Exemple 1.3 *Tracer le graphe G_2 (non orienté) dont la matrice d'adjacence est la suivante :*

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer également sa liste d'adjacence.

Dans un premier temps on écrit quelques fonction manipulant ces représentations. Les matrices $M1$ et $M2$ ont été écrites dans un fichier qui se trouve dans les documents du TP. On testera les fonctions sur ces graphes.

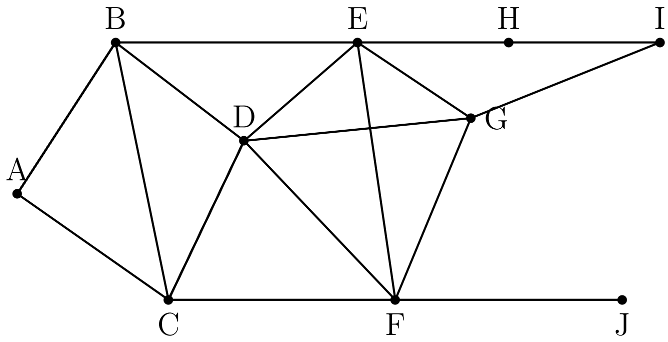
1. Dans un graphe non orienté, on appelle degré d'un sommet le nombre de sommets auxquels il est relié.
   Écrire une fonction `degre(M,i)` qui renvoie le degré du sommet i dans le graphe représenté par la matrice d'adjacence M.

2. Écrire une fonction `matriceVersListe(M )`qui renvoie la liste d'adjacence associée au graphe représenté par la matrice d'adjacence `M`.

3. Écrire la fonction `listeVersMatrice(L)`, réciproque de la précédente.

2 Nombre de chemins d'un sommet à l'autre

On testera ce qui suit sur l'exemple suivant. La matrice d'adjacence M_3 correspondant à ce graphe est également fournie dans le fichier associé au TP. Afin de pouvoir utiliser le calcul matriciel, on a défini $M3$ non pas juste comme une liste de listes, mais comme un tableau numpy (voir le TP 6 pour la syntaxe du calcul matriciel).



1. Combien y a-t-il de chemins de longueur 3 de A à B ?

2. Calculer (à l'aide de python) M_3^3. Quel est son coefficient d'indice $(0, 1)$?

3. Comment peut-on généraliser la propriété précédente ?

3 Connexité

Dans ce paragraphe, les graphes sont supposés non-orientés.
Un graphe est dit connexe lorsque l'on peut toujours joindre un sommet à un autre (le graphe G_3 l'est, pas G_2).
Si le graphe comporte n sommets, ou bien deux sommets peuvent être joints par un chemin de longueur au plus $n-1$, ou bien ils ne peuvent pas être joints. D'après le paragraphe précédent, pour vérifier si deux points i et j peuvent être joints, il faut donc regarder si le coefficient (i, j) d'une des matrices M, M^2, $\ldots$, M^{n-1} est non nul.
On en déduit la propriété suivante : un graphe est connexe si et seulement si tous les coefficients de la matrice $I + M + M^2 + \cdots + M^{n-1}$ sont non nuls.
Remarque : la matrice I fait partie de cette somme car on considère qu'un point est relié à lui même.
Vérifier cette propriété sur l'exemple du graphe G_2.