

# Programme des colles des semaines S15-S16

## Chapitre : variables aléatoires à densité

Les propriétés de ce chapitre sont admises (à l'exception des propriétés des lois usuelles).

### 1. Définitions et première propriétés

- Définition d'une densité de probabilité, d'une variable aléatoire admettant une telle densité
- Définition de la fonction de répartition
- Propriétés de la fonction de répartition d'une V.A. à densité
- Obtention d'une densité à partir de la fonction de répartition

### 2. Moments d'une variable aléatoire

- Définition de l'espérance d'une variable aléatoire
- Formule de transfert
- Moments d'ordre  $r$
- Variance : définition, formule de Koenig-Huygens

### 3. Propriétés générales des variables aléatoires réelles

- Espérance et variance de  $aX + b$  en fonction de celles de  $X$
- Espérance de  $X + Y$ , extension à une somme de  $n$  variables aléatoires
- Croissance de l'espérance
- Indépendance de  $n$  variables aléatoires (2 à 2 et mutuelle)
- Lemme des coalitions
- Espérance du produit de deux variables indépendantes
- Variance de la somme de deux variables indépendantes, extension à la somme de  $n$  variables

### 4. Lois usuelles

- Lois uniformes : densité, fonction de répartition, espérance, variance
- Prop : Pour  $a < b$ ,  $X$  suit une loi  $\mathcal{U}([a, b])$  ssi  $\frac{X - a}{b - a}$  suit une loi  $\mathcal{U}([0, 1])$ .
- Lois exponentielles : densité, fonction de répartition, espérance, variance
- Loi normale centrée réduite : densité (le fait que son intégrale vaille 1 est admis), espérance, variance
- Utilisation des propriétés de symétrie de la densité de la loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .
- Loi normale quelconque : densité
- Prop :  $X$  suit une loi  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$  ssi  $(X - m)/\sigma$  suit une loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .
- Conséquence : espérance et variance de  $X$  suivant une loi  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$
- Prop (admise) : la somme de variables aléatoires indépendantes suivant des lois normales suit une loi normale.

## Questions de cours

- **Lois uniformes :** densité, fonction de répartition, espérance (avec les calculs)
- **Lois exponentielles :** densité, fonction de répartition, espérance (avec les calculs)
- **Loi normale centrée réduite :** densité ; montrer qu'une variable aléatoire suivant une telle loi admet des moments à tout ordre, espérance (avec démonstration).
- **Lois normales :** densité d'une loi normale quelconque ; espérance (en utilisant un changement de variable).