

Programme des colles des semaines S15-S16

Chapitre : variables aléatoires à densité

Les propriétés de ce chapitre sont admises (à l'exception des propriétés des lois usuelles).

1. Définitions et première propriétés

- Définition d'une densité de probabilité, d'une variable aléatoire admettant une telle densité
- Définition de la fonction de répartition
- Propriétés de la fonction de répartition d'une V.A. à densité
- Obtention d'une densité à partir de la fonction de répartition

2. Moments d'une variable aléatoire

- Définition de l'espérance d'une variable aléatoire
- Formule de transfert
- Moments d'ordre r
- Variance : définition, formule de Koenig-Huygens

3. Propriétés générales des variables aléatoires réelles

- Espérance et variance de $aX + b$ en fonction de celles de X
- Espérance de $X + Y$, extension à une somme de n variables aléatoires
- Croissance de l'espérance
- Indépendance de n variables aléatoires (2 à 2 et mutuelle)
- Lemme des coalitions
- Espérance du produit de deux variables indépendantes
- Variance de la somme de deux variables indépendantes, extension à la somme de n variables

4. Lois usuelles

- Lois uniformes : densité, fonction de répartition, espérance, variance
- Prop : Pour $a < b$, X suit une loi $\mathcal{U}([a, b])$ ssi $\frac{X - a}{b - a}$ suit une loi $\mathcal{U}([0, 1])$.
- Lois exponentielles : densité, fonction de répartition, espérance, variance
- Loi normale centrée réduite : densité (le fait que son intégrale vaille 1 est admis), espérance, variance
- Utilisation des propriétés de symétrie de la densité de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.
- Loi normale quelconque : densité
- Prop : X suit une loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ ssi $(X - m)/\sigma$ suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$.
- Conséquence : espérance et variance de X suivant une loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$
- Prop (admise) : la somme de variables aléatoires indépendantes suivant des lois normales suit une loi normale.

Questions de cours

- **Lois uniformes** : densité, fonction de répartition, espérance (avec les calculs)
- **Lois exponentielles** : densité, fonction de répartition, espérance (avec les calculs)
- **Loi normale centrée réduite** : densité ; montrer qu'une variable aléatoire suivant une telle loi admet des moments à tout ordre, espérance (avec démonstration).
- **Lois normales** : densité d'une loi normale quelconque ; espérance (en utilisant un changement de variable).