Corrigé du DM n°4

À rendre le 27/01/2026

Exercice 1

1. Pour $x \geq 0$, on a :
$$f'(x) = 2 \times \frac{-e^x}{(1+e^x)^2} \ ;$$
on a donc bien $-f'(x) = h(x)$.
Pour $x \geq 0$,
$$g'(x) = -2 \times \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} \ ;$$
on obtient alors
$$g'(x) = 2 \times \frac{e^x \ e^{-x}}{e^x(1+e^{-x})} = \frac{2}{e^x+1} = f(x) \ .$$

2. Soit $A \geq 0$. Comme $-f$ est une primitive de h, on a :
$$\int_0^A h(x)\mathrm{dx} = [-f(x)]_0^A = -f(A) + f(0) = 1 - f(A) \ .$$
Comme g est une primitive de f,
$$\int_0^A f(x)\mathrm{dx} = [g(x)]_0^A = g(A) - g(0) = g(A) + 2\ln(2) \ .$$

3.
$$\int_0^A x.h(x)\mathrm{d}x \ = \ \int_0^A u(x)v(x)\mathrm{d}x \ ;$$
avec
$$u(x) = x \quad ; \quad u'(x) = 1$$
$$v'(x) = h(x) \quad ; \quad v(x) = -f(x) \ .$$
Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$, on peut donc appliquer la formule d'intégration par parties :
$$\begin{aligned} \int_0^A xf(x)\mathrm{d}x &= [u(x)v(x)]_0^A - \int_0^A u'(x)v(x)\mathrm{d}x \\ &= [-xf(x)]_0^A - \int_0^A (-f(x))\mathrm{d}x \\ &= -Af(A) + [g(x)]_0^A \\ &= -Af(A) + g(A) - g(0) \ . \end{aligned}$$

4. La limite à gauche en 0 de h est 0.
Sa limite à droite est $\dfrac{2e^0}{(1+e^0)^2}$, c'est à dire $\dfrac{1}{2}$.
Conclusion : la fonction h n'est pas continue en 0.

5.
   - La fonction h est continue sauf en 0.
   - La fonction h est à valeurs positives.
   - Déterminons l'intégrale de h sur $\mathbb{R}$.
     Sur $]-\infty, 0]$, l'intégrale de h converge et vaut 0.
     Sur $[0; +\infty[$, l'intégrale de h est impropre en $+\infty$. Soit $A \geq 0$. D'après le 2., on a :
     $$\int_0^A h(x)\mathrm{dx} = 1 - f(A) \ .$$

Or $\lim\limits_{A\to+\infty} f(A) = 0$. Donc cette intégrale converge et

$$\int_0^{+\infty} h(x)\mathrm{dx} = 1\ .$$

On en déduit que l'intégrale de h sur $\mathbb{R}$ converge et vaut 1.

Conclusion : h est bien une densité de probabilité.

6. On a, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$H(x) = P(Z \leq X) = \int_{-\infty}^{x} h(t)\mathrm{dt}\ .$$

- Pour $x < 0$, comme h est nulle sur $]-\infty, 0]$, on a $H(x) = 0$.
- Pour $x < 0$, on a :

$$H(x) = \int_0^x h(t)\mathrm{dt} = [-f(t)]_0^x = -f(x) + f(0)\ .$$

De plus,

$$f(0) - f(x) = 1 - \frac{2}{1+e^x} = \frac{1+e^x-2}{1+e^x} = \frac{e^x-1}{1+e^x}\ .$$

On a donc bien le résultat annoncé.

7. Remarquons que $\ln(2) > 0$ et $\ln(8) > 0$.

$P(Z \geq \ln(2)) = 1 - H(\ln(2)) = 1 - \dfrac{e^{\ln(2)}-1}{e^{\ln(2)}+1} = 1 - \dfrac{2-1}{2+1} = \dfrac{2}{3}$.

$P(\ln(2) \leq Z \leq \ln(8)) = H(\ln(8)) - H(\ln(2)) = \dfrac{7}{9} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{9}$.

$P_{[Z\geq\ln(2)]}(Z \leq \ln(8)) = \dfrac{P([Z \leq \ln(8)] \cap [Z \geq \ln(2)]}{P(Z \geq \ln(2))} = \dfrac{P(\ln(2) \leq Z \leq \ln(8))}{P(Z \geq \ln(2))} = \dfrac{\frac{4}{9}}{\frac{2}{3}} = \dfrac{2}{3}$.

8. On résout :

$$\begin{aligned} H(x) = \frac{1}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{e^x-1}{e^x+1} = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad 2(e^x-1) = e^x+1 \\ &\Leftrightarrow \quad e^x = 3 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \ln(3) \end{aligned}$$

La médiane de Z vaut donc $\ln(3)$.

9. Remarque : $x \mapsto xh(x)$ est à valeurs positives, donc la convergence de l'intégrale de cette fonction sur $\mathbb{R}$ est équivalente à sa convergence absolue.

- Sur $]-\infty, 0]$, $x \mapsto xh(x)$ l'intégrale de converge et est nulle.
- Intégrale sur $[0; +\infty[$.

  On a vu au 3. que, pour $A > 0$, $\displaystyle\int_0^A x.h(x)\mathrm{dx} = -Af(A) + g(A) - g(0)$.

  Or $Af(A) = \dfrac{2A}{1+e^A} \sim \dfrac{2A}{e^A}$; donc, par croissances comparées, $\lim\limits_{A\to+\infty} Af(A) = 0$.

  Et $g(A) = -2\ln(1+e^{-A})$; donc $\lim\limits_{A\to+\infty} g(A) = 0$.

  Donc l'intégrale sur $[0; +\infty[$ de $x \mapsto xh(x)$ converge et vaut $-g(0)$.

Conclusion : Z possède une espérance et

$$E(Z) = -g(0) = 2\ln(2)\ .$$

Exercice 2 (facultatif)

1. (a) $((U=-1)\,,\ (U=1))$ est un syst ème complet d'événements donc

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y\le x) &= \mathrm{P}(Y\le x\cap U=-1)+\mathrm{P}(Y\le x\cap U=1)\\ &= \mathrm{P}(UX\le x\cap U=-1)+\mathrm{P}(UX\le x\cap U=1)\\ &= \mathrm{P}(X\ge -x\cap U=-1)+\mathrm{P}(X\le x\cap U=1)\end{aligned}$$

(b) Comme U et X sont indépendantes,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y\le x) &= \mathrm{P}(X\ge -x)\,\mathrm{P}(U=-1)+\mathrm{P}(X\le x)\,\mathrm{P}(U=1)\\ &= \frac{1}{2}(1-\Phi(-x))+\frac{1}{2}\Phi(x)\\ &= \frac{1}{2}\Phi(x)+\frac{1}{2}\Phi(x)\\ &= \Phi(x)\end{aligned}$$

avec Φ la fonction de répartition de $\mathcal{N}(0,1)$.

Conclusion : $\boxed{Y \text{ suit la même loi que } X}$

2. (a) On a $E(U)=-1\mathrm{P}(U=-1)+1\mathrm{P}(U=1)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$.

(b) On a $XY=X^2U$ donc $E(XY)=E\left(X^2U\right)$ et, comme U et X^2 sont indépendantes, $E\left(X^2U\right)=E\left(X^2\right)E(U)=0$.
(X^2 a une espérance car X a une variance !)

Conclusion : $\boxed{E(XY)=0}$

(c) On a donc $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$ (espérance nulle pour $\mathcal{N}(0,1)$).

3. (a) On a $E\left(X^2\right)=V(X)+E(X)^2=1$.
Donc $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}t^2e^{-t^2/2}=1$
et par parité $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}t^2e^{-t^2/2}=\frac{1}{2}$ et

Conclusion : $\boxed{\int_0^{+\infty}t^2e^{-t^2/2}=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}}$

(b) Dans $\int_0^A x^4e^{-x^2/2}dx$ on pose $u'(x)=xe^{-x^2/2}$: $u(x)=-e^{-x^2/2}$: $v(x)=x^3$: $v'(x)=3x^2$ avec u et v de classe C^1.
Donc

$$\begin{aligned}\int_0^A x^4e^{-x^2/2}dx &= \left[-x^3e^{-x^2/2}\right]_0^A-\int_0^A -e^{-x^2/2}3x^2dx\\ &= -A^3e^{-A^2/2}+3\int_0^A x^2e^{-x^2/2}dx\end{aligned}$$

(c) Quand A tend vers $+\infty$, on a $A^3e^{-A^2/2}=\exp\left(-\frac{A^2}{2}+3\ln(A)\right)$, avec $-\frac{A^2}{2}+3\ln(A)=A^2\left(-\frac{1}{2}+3\ln(A)/A\right)\to-\infty$
et donc $A^3e^{-A^2/2}\to 0$.

D'autre part, $\int_0^A x^2e^{-x^2/2}dx\to\int_0^{+\infty}t^2e^{-t^2/2}=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$ donc

$\int_0^A x^4e^{-x^2/2}dx\to\frac{3\sqrt{2\pi}}{2}$

Conclusion : $\boxed{\int_0^{+\infty}x^4e^{-x^2/2}dx \text{converge et vaut } \frac{3\sqrt{2\pi}}{2}}$

(d) X a un moment d'ordre 4 si $\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$ converge.

Or $\int_0^{+\infty} x^4 e^{-x^2/2} dx$ converge, donc par parité $\int_{-\infty}^{0} x^4 e^{-x^2/2} dx$ converge également et vaut la même chose.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$ converge et vaut $2 \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \dfrac{3\sqrt{2\pi}}{2} = 3$.

Conclusion : $\boxed{X \text{ a un moment d'ordre 4 et } E\left(X^4\right) = 3}$

4. (a) On a $X^2Y^2 = X^4U^2$ avec $U^2 = 1$ donc $X^2Y^2 = X^4$ et

   Conclusion : $\boxed{E\left(X^2Y^2\right) = E\left(X^4\right) = 3}$

   (b) Comme X^2, Y^2 et X^2Y^2 ont une espérance alors $\left(X^2, Y^2\right)$ a une covariance et
   $\operatorname{Cov}\left(X^2, Y^2\right) = E\left(X^2Y^2\right) - E\left(X^2\right) E\left(Y^2\right) = 3 - 1 \cdot 1$.

   Conclusion : $\boxed{\operatorname{Cov}\left(X^2, Y^2\right) = 2}$

   (c) **Si** X^2 et Y^2 sont indépendantes **alors** $\operatorname{Cov}\left(X^2, Y^2\right) = 0$ donc (contraposée)
   comme $\operatorname{Cov}\left(X^2, Y^2\right) \neq 0$ **alors**
   X^2 et Y^2 ne sont pas indépendantes.
   Et **si** X et Y sont indépendantes **alors** une fonction de X est indépendante d'une fonction de Y.
   Ici avec la fonction carré;
   Comme X^2 et Y^2 ne sont pas indépendantes **alors** X et Y ne le sont pas.

   (d) *Conclusion :*

Si X et Y sont indépendantes alors la covariance est nulle Mais la réciproque est fausse.