CHAÎNES DE MARKOV

Introduction

Une chaîne de Markov est un processus probabiliste servant à décrire l'évolution de certains systèmes dans le temps. Nous allons étudier cette notion en l'illustrant par l'exemple suivant.

Exemple 0.1. *Un système peut se trouver dans deux états : 1 et 2. Chaque jour, il change (ou pas) d'état. Le jour 0, il se trouve dans l'état 1. Ensuite, d'un jour à l'autre, il évolue de la manière suivante :*

- *s'il était dans l'état 1 le jour n, il y reste avec une probabilité de* $0,5$ *et donc passe dans l'état 2 avec une probabilité de* $0,5$ *;*
- *s'il était dans l'état 2 le jour n, il y reste avec une probabilité de* $0,4$ *et donc passe dans l'état 1 avec une probabilité de* $0,6$*.*

On représente ces données par un graphe appelé graphe probabiliste :

1 Formalisation et vocabulaire

1.1 Représentation de l'état du processus

On admet l'existence d'un espace de probabilisé (Ω, P) modélisant cette expérience aléatoire. On définit alors une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires de la manière suivante : X_n vaut 1 si le système est dans l'état 1 au temps n et vaut 2 si le système est dans l'état 2 au temps n.
Le n-ème état du système est décrit par la matrice ligne (représentant une loi de probabilité) :

$$V_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) & P(X_n = 2) \end{pmatrix}$$

Le processus décrit ci-dessus se traduit alors en termes de probabilités conditionnelles : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{ll} P_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 1) = \dots \quad , & P_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 2) = \dots \quad , \\ P_{[X_n=2]}(X_{n+1} = 1) = \dots \quad , & P_{[X_n=2]}(X_{n+1} = 2) = \dots \quad . \end{array}$$

1.2 Matrice de transition

En appliquant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements formé par $[X_n = 1]$ et $[X_n = 2]$, on obtient les relations :

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 1) &= \dots \\ &= \dots \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 2) &= \dots \\ &= \dots \end{aligned}$$

Ces relations peuvent s'écrire de manière matricielle :

Définition 1.1. *Notons, pour i et j dans $\{1,2\}$ (à adapter bien sûr si la chaîne a plus de deux états) $m_{i,j} = P_{[X_n=i]}(X_{n+1} = j)$. La matrice de transition est la matrice M dont les coefficients sont les nombres $m_{i,j}$.*

Exemple 1.2. *Dans notre exemple,*

$$M = \dots$$

Remarque : sur chaque ligne d'une telle matrice, la somme des coefficients vaut 1.

Propriété 1.3. *On a, pour $n \in \mathbb{N}$,*

$$V_{n+1} = V_n \ M$$

Démonstration : (pour une chaîne à deux états)

Propriété 1.4. *On a, pour $n \in \mathbb{N}$,*

$$V_n = V_0 \ M^n$$

Démonstration :

1.3 État stable

Définition 1.5. *On appelle état stable un état V qui vérifie :*

$$V = V\ M$$

Rappelons que V représente une loi de probabilité.

Remarque 1.6. *Cet état tire son nom du fait suivant. Supposons qu'initialement la chaîne soit dans cet état, c'est à dire que V_0 vérifie la relation $V_0 = V_0\ M$. Alors l'état suivant est $V_1 = V_0\ M = V_0$; et par une récurrence immédiate on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = V_0$.*

Exemple 1.7. *Déterminer l'état stable dans notre exemple.*

Rappels sur la transposée :

$$^t\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = ... \qquad ; \qquad ^t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = ...$$

et

$$^t(AB) = {}^tB\ {}^tA$$

Propriété 1.8. *Un état probabiliste V est un état stable si et seulement si ${}^tV$ est un vecteur propre de ${}^tM$ associé à la valeur propre 1.*

Démonstration :

2 Évolution temporelle du système

L'objectif de l'étude d'un processus décrit par une chaîne de Markov est la plupart du temps de connaître son évolution en temps long, c'est à dire la limite éventuelle de V_n. Si une telle limite existe, on peut affirmer qu'après un certain temps, la probabilité du système de se trouver dans un certain état est connue.
On a vu au paragraphe précédent que $V_n = V_0 M^n$. Notre problème se ramène donc à celui du calcul des puissances de M.

Exemple 2.1. *Revenons à l'exemple initial. On note*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} \quad ; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/10 \end{pmatrix} \quad ; \quad Q = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

1. *Vérifier que Q est l'inverse de P, puis que $M = PDP^{-1}$.*
2. *En déduire l'expression de V_n.*
3. *Déterminer la limite de V_n.*

Remarque 2.2. *On remarque sur cet exemple la convergence de l'état du système vers l'état stable. C'est un fait général (sous certaines hypothèses).*
Remarquons également que cette convergence est une convergence en loi de la suite de variables aléatoires (X_n) (notion qui sera abordée dans un autre chapitre).