Feuille d'exercices n°9 : Chaînes de Markov

Exercice 1. – On dispose d'une urne contenant quatre boules numérotées $1, 2, 3$ et 4. On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule avec remise et on suppose qu'à chaque tirage, chacune des boules a la même probabilité d'être tirée.
On note pour tout n de $\mathbb{N}^*$, X_n la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus en n tirages.
On a donc $X_1 = 1$ et par exemple, si les premiers tirages donnent $2, 2, 1, 2, 1, 4, 3$ alors on a : $X_1 = 1$, $X_2 = 1$, $X_3 = 2$, $X_4 = 2$, $X_5 = 2$, $X_6 = 3$, $X_7 = 4$.
La probabilité d'un événement H est notée $P(H)$.
L'espérance et la variance d'une variable aléatoire Z sont notées respectivement $E(Z)$ et $V(Z)$.
On note pour tout n de $\mathbb{N}^*$, U_n la matrice lignes définie par :

$$U_n = \begin{pmatrix} P([X_n = 1]) & P([X_n = 2]) & P([X_n = 3]) & P([X_n = 4]) \end{pmatrix} .$$

On qualifie cette matrice d'état probabiliste du processus au temps n.

1. (a) Déterminer la loi de la variable aléatoire X_2.
   (b) Calculer $E(X_2)$ et $V(X_2)$.
2. (a) Déterminer U_1.
   (b) Préciser l'ensemble des valeurs prises par X_n.
   (c) Tracer le graphe de transition associé à ce processus et déterminer sa matrice de transition A.
   (d) Rappeler le lien entre A, U_n et U_{n+1}.
3. On note $f : \mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par $f(X) = X\ A$.
   (a) Résoudre l'équation $f(X) = X$.
   (b) Comment évoluerait U_n si U_1 était solution de cette équation ? Comment qualifie-t-on un tel état probabiliste ?
   (c) Quelle est la matrice B de f dans la base canonique de $\mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R})$?
4. On considère les quatre matrices V_1, V_2, V_3, V_4 à 4 lignes et 1 colonne, définies par :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, V_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Calculer $f(V_1)$, $f(V_2)$, $f(V_3)$, $f(V_4)$. Interpréter les résultats de ce calcul en terme d'éléments propres.
   (b) Montrer que V_1, V_2, V_3, V_4 constituent une base de $\mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R})$. Déterminer les coordonnées de U_1 dans cette base.
   (c) Établir par récurrence que , pour tout n de $\mathbb{N}^*$, les coordonnées de U_n dans cette base sont $\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$, $3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $3\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$, 1.
   (d) Déterminer la loi de la variable aléatoire X_n. Comment évolue cette loi lorsque n tend vers $+\infty$?
5. (a) Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la valeur de $E(X_n)$.
   (b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n)$. Commenter.

Exercice 2. – Une société de location de voitures possède trois agences, une à Rennes, une à Lyon, une à Marseille. Lorsqu'un client loue une voiture, un jour donné, dans une des trois villes, il la restitue le soir même dans une des trois agences. Une étude statistique a permis de montrer que, pour une voiture donnée :

- si elle est louée à Rennes un certain jour, alors elle est laissée le soir à Lyon avec la probabilité 1/4, tandis qu'elle est laissée à Marseille avec la probabilité 3/4 ;
- si elle est louée à Lyon, alors elle est laissée à Rennes avec la probabilité 1/2, laissée à Marseille avec la probabilité 1/4, et ramenée à Lyon avec la probabilité 1/4 ;
- si elle est louée à Marseille, elle est laissée à Rennes avec la probabilité 1/2, laissée à Lyon avec la probabilité 1/4, et ramenée à Marseille avec la probabilité 1/4.

On note $(\Omega, \mathbb{P})$ l'espace probabilisé décrivant cette expérience aléatoire ; on ne cherchera pas à l'expliciter.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on introduit les événements R_n : la voiture se trouve à Rennes le soir du n-ième jour, L_n : la voiture se trouve à Lyon le soir du n-ième jour, M_n : la voiture se trouve à Marseille le soir du n-ième jour ; et on note $r_n = \mathbb{P}(R_n)$, $l_n = \mathbb{P}(L_n)$ et $m_n = \mathbb{P}(M_n)$. On suppose qu'au départ (soir du jour 0), la voiture est à Rennes.

1. Pour tout n, déduire de l'énoncé les valeurs de $\mathbb{P}_{R_n}(L_{n+1})$, $\mathbb{P}_{R_n}(M_{n+1})$, $\mathbb{P}_{R_n}(R_{n+1})$; de même pour les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_{L_n}$ et $\mathbb{P}_{M_n}$.
2. Pour tout entier n , on définit la matrice U_n par $U_n = \begin{pmatrix} r_n & l_n & m_n \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer r_0, l_0 et m_0, puis expliciter U_0.
   (b) Montrer que pour tout $n \in N$, $r_{n+1} = \frac{1}{2}l_n + \frac{1}{2}m_n$ (justifier rigoureusement) et déterminer deux relations analogues pour l_{n+1} et m_{n+1}.
   (c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la relation $U_{n+1} = U_n\ A$, où A est une matrice à déterminer (appelée matrice de transition).
   (d) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = U_0\ A^n$.
   (e) Déterminer l'état stable pour la matrice de transition A.
3. On se propose dans cette question de calculer A^n.
   (a) Calculer $A(A - I_3)(A + \frac{1}{2}I_3)$.
   (b) Déterminer les éléments propres de A.
   (c) Montrer que A est diagonalisable et effectuer cette diagonalisation (on notera $A = PDP^{-1}$, avec D diagonale).
   (d) Montrer (soigneusement) que pour tout $n \geq 0$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
4. (a) Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, r_n, l_n et m_n en fonction de n.
   (b) Déterminer les limites de ces probabilités lorsque n tend vers l'infini, ainsi que la limite de (U_n). Que remarque-t-on ?

Exercice 3. – Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de transition d'une chaîne de Markov.

1. Rappeler les propriétés d'une telle matrice.
2. Montrer que 1 est valeur propre de A.
3. Montrer que si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet λ pour valeur propre, alors ${}^tB$ admet λ pour valeur propre.
4. Peut-on en déduire que la chaîne associée à A admet un état stable ?