

Feuille d'exercices n°10 : Équations différentielles

Exo 1. – Déterminer la fonction f solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' - 4y = 2$ et vérifiant $f(0) = 1$.

Exo 2. – On considère l'équation différentielle $(E) : y' - 2y = \frac{-2}{1 + e^{-2x}}$

1. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} \ln(1 + e^{-2x})$ est solution de (E) .
2. En déduire l'ensemble des solutions de (E) .

Exo 3. – Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $2y'' + 3y' + y = 5$.

Exo 4. –

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' - \frac{2}{3}y' + \frac{1}{9}y = 0$.
2. Déterminer la solution vérifiant les conditions initiales $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Exo 5. – On considère l'équation différentielle $(E) : y' + 3y = 6x^2 + 7x - 2$ (E).

1. Montrer que cette équation admet comme solution une fonction du second degré $g : x \mapsto ax^2 + bx + c$, que l'on déterminera.
2. En déduire l'ensemble des solutions de (E) .

Exo 6. – Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x' &= -\frac{5}{8}x - \frac{1}{8}y \\ y' &= -\frac{3}{8}x - \frac{7}{8}y \end{cases} \quad ; \quad x(0) = 1, y(0) = 0.$$

Exo 7. – L'objectif de l'exercice est de résoudre le système différentiel :

$$(SD) \begin{cases} x' &= x - y - z \\ y' &= -3x + 3y - 3z \\ z' &= -z + y + z \end{cases} \quad ; \quad x(0) = 1, y(0) = 0, z(0) = 0.$$

1. On considère la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calculer $B^3 - 5B^2 + 6B$. En déduire les valeurs propres possibles de B .
- (b) Montrer que B est diagonalisable et effectuer cette diagonalisation.
2. Résoudre le système initial.

Exo 8. – Équation du second ordre et système différentiel

1. Résoudre l'équation différentielle suivante : $y'' + \frac{9}{2}y' + 2y = 0$ (E).
2. La fonction y étant définie sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$, on pose $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$.
 - (a) Montrer que (E) est équivalente à un système différentiel (SD) liant Y à Y' .
 - (b) Résoudre (SD) et vérifier que l'on obtient les mêmes solutions qu'au 1.

Exo 9. – Exemple d'application de la méthode variation de la constante

On cherche à résoudre l'équation différentielle (E) : $y' + y = \frac{1}{1 + e^x}$.

1. Montrer que les solutions de l'équation homogène associée sont les fonction de la forme $x \mapsto Ce^{-x}$, où C est une constante.
2. Déterminer les solutions de (E) de la forme $x \mapsto C(x)e^{-x}$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Exo 10. – Résolution grâce à une trigonalisation

On considère le système différentiel (S) : $X' = AX$, où $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

1. A est-elle diagonalisable ?
2. Montrer que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de (S) (on pourra utiliser la méthode de l'exercice précédent).