

ÉQUATIONS ET SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS

Introduction

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction et qui met en jeu cette fonction ainsi que ses dérivées. Par exemple, on cherche une fonction f qui vérifie, pour tout réel t :

$$f'(t) + 2tf(t) = 2t^2 + 1 \quad (E).$$

Résoudre cette équation (E) , c'est trouver toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ qui vérifient la relation quel que soit t dans $\mathbb{R}$.

On verra souvent la notation suivante pour (E) :

$$y' + 2t y = 2t^2 + 1.$$

Exemple 0.1. Vérifier que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = e^{-t^2} + t$ est solution de (E) .

Les propriétés de ce chapitre seront admises

1 Équations différentielles d'ordre 1 à coefficients constants

On considère dans cette partie des équations du type :

$$y' + a y = b(t);$$

où a est une constante et b une fonction définie sur un intervalle I .

Si a est nul, résoudre cette équation revient à trouver une primitive de b . On suppose dans ce qui suit que a est non nul.

1.1 Équation sans second membre

Il s'agit de l'équation :

$$y' + a y = 0.$$

Une telle équation est dite homogène.

Propriété 1.1. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation précédente sont les fonctions du type $t \mapsto \lambda e^{-at}$.

Remarque 1.2. Il est clair que les fonctions de ce type sont solutions.

1.2 Équation avec second membre constant

Il s'agit de l'équation :

$$y' + a y = b ;$$

où b est une constante.

Propriété 1.3. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation précédente sont les fonctions du type $t \mapsto \lambda e^{-at} + \frac{b}{a}$.

Remarque 1.4. Il est clair que les fonctions de ce types sont solutions.

1.3 Principe de superposition

On revient à l'équation $y' + a y = b(t)$ (E).

Propriété 1.5 (Principe de superposition). Supposons que f_p est une solution particulière de cette équation. Alors les solutions de l'équation sont les fonctions du type $t \mapsto f_p(t) + f_h(t)$, où f_h est une solution de l'équation $y' + a y = 0$, appelée dans ce contexte équation homogène associée à l'équation initiale.

Démonstration :

Exemple 1.6. On considère l'équation $y' + 2y = t$ (E_1).

1. Montrer que la fonction f définie par $f(t) = \frac{t}{2} - \frac{1}{4}$ est solution l'équation.
2. En déduire l'ensemble des solutions de (E_1).

2 Équations différentielles d'ordre 2 à coefficients constants

On considère dans cette partie des équations du type :

$$y'' + a y' + b y = c(t) ;$$

où a et b sont des constantes et c une fonction définie sur un intervalle I .

2.1 Équation sans second membre

Il s'agit de l'équation :

$$y'' + a y' + b y = 0 .$$

Une telle équation est dite homogène.

Propriété 2.1. On associe à cette équation différentielle son équation caractéristique : $r^2 + ar + b = 0$.

- Si cette équation a deux racines distinctes, r_1 et r_2 , alors les solutions de l'équation homogène sont les fonctions du type : $t \mapsto \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}$.
- Si cette équation a racine double, r_0 , alors les solutions de l'équation homogène sont les fonctions du type : $t \mapsto (\lambda t + \mu) e^{r_0 t}$.

Exemple 2.2. 1. Résoudre l'équation $y'' + 5y' + 4y = 0$.

2. Déterminer la solution f vérifiant de plus $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

2.2 Équation avec second membre

On revient à l'équation :

$$y'' + a y' + b y = c(t) \quad (E) .$$

Propriété 2.3 (Principe de superposition). Supposons que f_p est une solution particulière de cette équation. Alors les solutions de l'équation sont les fonctions du type $t \mapsto f_p(t) + f_h(t)$, où f_h est une solution de l'équation $y'' + a y' + b y = 0$, appelée dans ce contexte équation homogène associée à l'équation initiale.

Exemple 2.4. Résoudre l'équation $y'' + 5y' + 4y = 1$.

Exemple 2.5. On considère l'équation $y'' + 5y' + 4y = 4t^2 + 18t + 16$ (E_2).

1. Vérifier que la fonction $t \mapsto (t+1)^2$ est solution de (E_2).
2. En déduire l'ensemble des solutions de (E_2).

3 Systèmes différentiels

3.1 Définition

Un système différentiel est un ensemble d'équations différentielles portant sur plusieurs fonctions ; par exemple :

$$(SD) \begin{cases} x_1' &= 5x_1 - 6x_2 \\ x_2' &= 3x_1 - 4x_2 \end{cases}$$

Ici les inconnues sont deux fonctions x_1 et x_2 de la variable t . En notant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, ce qui donne $X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$, le système (SD) peut s'écrire sous forme matricielle : $X' = AX$, où A est la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

Définition 3.1. On appelle système différentiel une équation du type $X' = AX$, où X est une application de $\mathbb{R}$ (ou un intervalle $I \subset \mathbb{R}$) dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On appelle problème de Cauchy la donnée d'un tel système et de conditions (souvent dites "initiales") du type $X(t_0) = X_0$, X_0 étant un élément donné de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Remarque 3.2. Bien sûr une équation différentielle d'ordre 1 (sans second membre) est un système différentiel particulier.

Nous verrons en TD le lien entre les équations différentielles d'ordre 2 et les systèmes différentiels.

Propriété 3.3. Un problème de Cauchy admet une unique solution.

3.2 Résolution sur un exemple d'un système homogène

On considère le système homogène $X' = AX$, où A est la matrice introduite au paragraphe précédent.

La diagonalisation de la matrice A va permettre la résolution de ce système. On illustre cette méthode sur cet exemple.

1. On note $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Vérifier que $PDP^{-1} = A$.

2. On pose $Y = P^{-1}X$.

(a) Vérifier que $X' = PY'$.

(b) Montrer que X est solution de (SD) si et seulement si Y est solution de l'équation $Y' = DY$.

(c) Résoudre l'équation $Y' = DY$.

(d) En déduire l'ensemble des solutions de (SD) .

3. Déterminer la solution de (SD) telle que $x_1(0) = 1$ et $x_2(0) = 0$.